Archives of Mining Sciences **45**, 2 (2000) 237—245

ALFRED TRZASKA *, KRYSTYNA SOBOWSKA **

PROCESS OF COLMATAGE WITH TRANSIENT BOUNDARY CONDITION

PRZEBIEGI ZJAWISKA KOLMATACJI Z NIEUSTALONYM WARUNKIEM BRZEGOWYM

The subject of this publication is a certain model of the process of colmatage in a porous medium with a closed circulation of suspension. The process is investigated in which a liquid flowing out of the medium flows into the container filled with suspension. It is mixed there with the rest of the liquid and forced back into the medium.

The investigations are carried out on the basis of the system of balance-transport (2) and kinetics (3) equations and on that of the balance of forced suspension (9). Initial-boundary conditions are accepted in the form (4), (5). Function of time $n(t)$ of forced suspension (13) have been obtained followed by the distribution of concentration of suspension $N(x,t)$ (14) flowing through the medium, and the distribution of the medium porosity $\varepsilon(x,t)$ (16).

Basing on the equation of motion (17) the distribution of pressure in the porous medium (19) has been determined.

Key words: the flow with mass and momentum exchange, colmatage, filtration.

Tematem niniejszej publikacji jest pewien model przebiegu procesu kolmatacji w ośrodku porowatym przy zamkniętym obiegu zawiesiny. W trakcie takiego procesu koncentracja zatłaczanej do ośrodka zawiesiny, która w chwili $t = 0$ posiada wartość n_0, zmienia się wskutek osadzania w ośrodku transportowanych przez ciecz cząstek. Wartość koncentracji na wlocie nie ulega zmianie przez okres wyznaczony dojściem czoła fali z punktu $x = 0$ do punktu $x = L$. W tym momencie, który w pracy oznaczamy jako $t = t_1$, wypływającą z ośrodka zawiesinę nawracamy do zbiornika, z którego jak poprzednio po dokładnym, permanentnym wymieszaniu jest zatłaczana do ośrodka porowatego. Poczynając od chwili $t = t_1$ koncentracja zawiesiny na wejściu do ośrodka staje się funkcją czasu $n(t)$. Na jej wartość wpływa koncentracja zawiesiny w zbiorniku w chwili $t = 0$, oraz charakter przebiegu zjawiska, w wyniku którego koncentracja na wyjściu z ośrodka może przyjmować różne wartości $0 \leqslant N(L,t) \leqslant n_0$. Gdy $N(L,t) = n_0$ nie zachodzi proces kolmatacji. Wtedy

* WYDZIAŁ GÓRNICZY, AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA, 30-059 KRAKÓW, AL. MICKIEWICZA 30
** INSTYTUT MATEMATYKI, AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA, 30-059 KRAKÓW, AL. MICKIEWICZA 30

przepływająca przez ośrodek zawiesina nie poddawana jest wymianie masy z otoczeniem: z ośrodka ciekłego do porowatego. W przypadku przepływu z wymianą masy zachodzi warunek $0 \leqslant N(L,t) < n_0$. Z punktu widzenia matematycznego opisu obiektem naszego zainteresowania są przepisy funkcyjne takich wielkości, jak rozkład koncentracji unoszonych i zatrzymanych w ośrodku porowatym cząstek kolmatanta, opis rozkładu porowatości ośrodka, a co za tym idzie i rozkład ciśnień do jakiego dochodzi w wyniku przebiegu omawianego procesu na drodze x i w czasie t jego trwania.

Wymieniony opis teoretyczny podajemy w oparciu o układ równań bilansu-transportu i kinetyki procesu kolmatacji, który to układ ze względu na przyjęty model przebiegu zjawiska ma postać daną wzorami (2) i (3) z warunkami początkowo-brzegowymi (4), (5). W uzyskanym rozwiązaniu powyżej omawianych równań dostajemy funkcję określającą rozkład przepływających cząstek kolmatanta $N(x,t)$ w postaci (8) z niewiadomą funkcją $n(t)$, która występuje w nieustalonym warunku brzegowym (5) opisywanego zjawiska. Przepis na wymienioną funkcję otrzymujemy rozwiązując liniowe równanie różniczkowe, do którego dochodzimy dokonując bilansu cząstek stałych znajdujących się w zbiorniku w różnych czasach t. Rozwiązanie uzyskanego równania (9) otrzymujemy stosując przekształcenie Laplace'a. Sposób rozwiązania przedstawiono w apendyksie. Uzyskaną w wyniku funkcję $n(t)$ (12) wykorzystujemy podstawiając ją do wzoru (7) i otrzymując w ten sposób przepis informujący o rozkładzie przepływających cząstek $N(x,t)$ (14).

Drugą szukaną funkcję $\varepsilon(x,t)$ dostajemy podstawiając wzór (14) do równania (3) i całkując je z warunkiem początkowym (4). Postać tej funkcji dana jest wzorem (16).

Kolejna funkcja, której poszukujemy i podajemy, informuje o rozkładzie ciśnienia i jego zmienności w trakcie przebiegu zjawiska kolmatacji, przy czym zakładamy, że przepływ zachodzi ze stałą prędkością filtracji q. Rozkład ciśnienia uzyskujemy całkując równanie ruchu (17) z warunkiem (18) po podstawieniu do niego wyliczonej poprzednio funkcji $\varepsilon(x,t)$ danej wzorem (16). Otrzymana funkcja $h(x,t)$ (19) jest ostatnim przepisem opisującym całokształt zagadnień związanych z przebiegiem zjawiska kolmatacji zachodzącego w omawianym ośrodku.

Słowa kluczowe: przepływy z wymianą masy i pędu, kolmatacja, filtracja.

1. Introduction

This paper, as in (Trzaska & Sobowska, 2000), presents the process of colmatage in a porous medium with a closed circulation of suspension. This time, however, the process proceeds in a different way.

We have assumed that suspension of volume V and concentration n_0, is initially placed in container. When $t = 0$, we start to force in into a one-dimensional, porous medium of the length L, the cross-section S and the initial porosity ε_0. We assume that the volume od the pore space of the medium, i.e. $SL\varepsilon_0$, is smaller than the volume of the suspension in the container ($SL\varepsilon_0 < V$).

We also think that the flow proceeds at constant velocity of filtration q. At the moment $t_1 = L\varepsilon_0/q$ the wave front of the flowing liquid reaches point $x = L$, i.e. the suspension starts outflowing of the porous medium. Then, it is forced back to the container, where it is mixed all the time and forced into the porous medium. In this way closed circulation of the suspension is formed. Let us notice that at the moment

$t \geqslant t_1$, the suspension having the volume $V_1 = V - SL\varepsilon_0$ fills the container. Its volume concentration is a function of time denoted by $n(t)$. The following occurs

$$n(t) = n_0 \qquad \text{for } 0 \leqslant t \leqslant t_1 \tag{1}$$

The volume concentration of suspension flowing through the porous medium is a function of position and time denoted by $N(x, t)$. The porosity of the medium $\varepsilon(x, t)$ is also the function of position and time.

2. System of balance-transport and kinetics equations

To determine the porosity of the medium and the concentration of suspension flowing through it, we use, as in (T r z a s k a & S o b o w s k a, 2000), a system of balance-transport

$$\frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t} = \varepsilon_0 \frac{\partial N(x,t)}{\partial t} + q \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} \tag{2}$$

and kinetics equations

$$\frac{\partial \varepsilon(x,t)}{\partial t} = -\alpha q N(x,t), \tag{3}$$

where:

α — colmatage coefficient.

The system (2), (3) is solved using initial-boundary conditions

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0, \quad \text{when} \quad 0 \leqslant qt/\varepsilon_0 \leqslant x \leqslant L \tag{4}$$

$$N(0,t) = n(t), \quad \text{when} \quad t \geqslant 0 \tag{5}$$

Eliminating $\varepsilon(x,t)$ from the system (2), (3) we obtain equation

$$q \frac{\partial N(x,t)}{\partial x} + \varepsilon_0 \frac{\partial N(x,t)}{\partial t} + \alpha q N(x,\mathrm{t}) = 0 \tag{6}$$

for which the boundary condition is accepted in the form (5).

Let us introduce a new variables $\tau = t - \varepsilon_0 x/q$, $\xi = x$. Then

$$\frac{\partial N}{\partial t} = \frac{\partial N}{\partial \tau}, \quad \frac{\partial N}{\partial x} = \frac{\partial N}{\partial \xi} - \frac{\varepsilon_0}{q} \frac{\partial N}{\partial \tau}$$

Equation (6) will have the form

$$\frac{\partial N(\xi,\tau)}{\partial \xi} + \alpha N(\xi,\tau) = 0$$

Function $N(\xi,\tau) = C(\tau)\exp(-\alpha\xi)$, where $C(\tau) = N(0,\tau)$, is its solution.

Basing on the condition (5) we have

$$C(\tau) = n(\tau) = n$$

The solution of equation (6) has the form

$$N(x,t) = n(t-\varepsilon_0 x/q)\exp(-\alpha x) \tag{7}$$

The concentration of suspension flowing out of the medium at point $x = L$ is expressed by formula

$$N(L,t) = n(t-t_1)\exp(-\alpha L) \tag{8}$$

The form of function $n(t)$ will be determined in the next chapter.

2. Determination of the concentration $n(t)$ of suspension forced into the porous medium

At every moment $t \geqslant t_1$, the same amount of liquid equal to $qSdt$ flows in and out of the container at time dt. The volume of suspension in the container is constant for $t \geqslant t_1$, and equals $V_1 = V - SL\varepsilon_0$. The volume difference of solid particles in the suspension at the moments $t+dt$ and t is equal to the volume difference of solid particles flowing into the container at time dt and flowing out of it at this time. Let us remember that the suspension flowing into the container flows out of the porous medium. Its concentration is equal to $N(L,t)$. Thus, we have

$$n(t+dt)V_1 - n(t)V_1 = N(L,t)qSdt - n(t)qSdt$$

The increment of the function on the left- hand side of the above equality is replaced by a differential and the following equality is obtained

$$\frac{dn(t)}{dt}dtV_1 = N(L,t)qSdt - n(t)qSdt$$

After transformations, and taking formula (8) into account, we obtain a differential equation

$$n'(t) = an(t-t_1)e^{-\alpha L} - an(t), \qquad \text{for} \qquad t \geqslant t_1 \tag{9}$$

where:

$a = qS/V_1$.

Let us introduce denotations $n(t-t_1) = n_1(t)$ for $t \geqslant t_1$. We are going to solve equation (9) using the Laplace transform. Therefore function $n_1(t)$ must obtain the value in the interval $[0, t_1)$. This value should be chosen in such a way as to satisfy the equation in this interval. Because of condition (1) we have

$$0 = an_1(t)e^{-\alpha L} - an_0, \qquad \text{when} \qquad 0 \leqslant t < t_1$$

Hence

$$n_1(t) = n_0 e^{\alpha L}, \qquad \text{for} \qquad 0 \leqslant t < t_1$$

Function $n_1(t)$ is, thus, denoted by formula

$$n_1(t) = \begin{cases} n_0 e^{\alpha L}, & \text{for} \quad 0 \leqslant t < t_1 \\ n(t-t_1), & \text{for} \quad t \geqslant t_1 \end{cases}$$

or by

$$n_1(t) = \eta(t-t_1)\, n(t-t_1) + [\eta(t) - \eta(t-t_1)]\, n_0 e^{\alpha L}$$

$\eta(\mathrm{t})$ is the Heaviside function where:

$$\eta(t) = \begin{cases} 0, & \text{for} \quad t < 0 \\ 1, & \text{for} \quad t \geqslant 0 \end{cases}$$

Now equation

$$n'(t) = a n_1(t) e^{-\alpha L} - a n(t) \quad \text{for} \quad t \geqslant 0 \tag{10}$$

with initial condition

$$n(0) = n_0 \tag{11}$$

is solved.
Applying the Laplace transform (see appendix) we obtain the solution in the form of

$$n(t) = n_0 - n_0(1 - e^{-\alpha L}) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1} e^{-\alpha k L}}{k!} \eta(t-(k+1)t_1) \int_0^{t-(k+1)t_1} t^k e^{-at}\, dt \tag{12}$$

When $pt_1 \leqslant t < (p+1)t$, where p is a certain natural number, formula (12) can be written in the form

$$n(t) = n_0 - n_0(1 - e^{-\alpha L}) \sum_{k=0}^{p-1} \frac{a^{k+1} e^{-\alpha k L}}{k!} \int_0^{t-(k+1)t_1} t^k e^{-at}\, dt \tag{13}$$

For example

$$n(t) = n_0, \quad \text{for} \quad 0 \leqslant t < t_1 \tag{13'}$$

$$n(t) = n_0 - n_0(1 - e^{-\alpha L})(1 - e^{-a(t-t_1)}) \quad \text{for} \quad t_1 \leqslant t < 2t_1 \tag{13''}$$

$$n(t) = n_0 - n_0(1 - e^{-\alpha L})\{1 - e^{-a(t-t_1)} + e^{-\alpha L}[1 - e^{-a(t-2t_1)}(a(t-2t_1)+1)]\}$$
$$\text{for} \quad 2t_1 \leqslant t < 3t_1 \tag{13'''}$$

etc.

4. Concentration of suspension flowing through the porous medium and the porosity of the medium in the function of position and time

The concentration of suspension flowing through the porous medium can be found when formula (12) is taken into account in equation (7). The following is obtained

$$N(x,t) = n_0 e^{-\alpha x} - n_0 e^{-\alpha x}\left(1-e^{-\alpha L}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{k+1}e^{-\alpha k L}}{k!}\times$$

$$\times\,\eta\left(t-\frac{\varepsilon_0 x}{q}-(k+1)t_1\right)\int\limits_0^{t-\frac{\varepsilon_0 x}{q}-(k+1)t_1} t^k e^{-at}\,dt \qquad (14)$$

$$\text{for}\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad t\geqslant\frac{\varepsilon_0 x}{q}$$

Function of the porosity of the medium can be determined using equation (3). Integrating it in relation to t and taking condition (4) into account we obtain

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 - \alpha q\int\limits_{\frac{\varepsilon_0 x}{q}}^{t} N(x,t)\,dt,\quad \text{for}\quad 0\leqslant x\leqslant L,\quad t\geqslant\frac{\varepsilon_0 x}{q} \qquad (15)$$

When equation (7) is taken into consideration in formula (15) and after transformations, we obtain

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 - \alpha q\int\limits_{\frac{\varepsilon_0 x}{q}}^{t} n\left(t-\frac{\varepsilon_0 x}{q}\right)e^{-\alpha x}\,dt = \varepsilon_0 - \alpha q e^{-\alpha x}\int\limits_0^{t-\frac{\varepsilon_0 x}{q}} n(t)\,dt \qquad (16)$$

where:

$n(t)$ is given by formula (13).

The above formula could be applied when its right side is bigger than zero. Giving consideration to the fact that the volume of function $n(t)$ is calculated according to various formulae in the intervals of the type $[kt_1,(k+1)t_1)$ the above formula is written in the form

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 - \alpha q e^{-\alpha x}\left[\int\limits_0^{t_1} n(t)\,dt + \int\limits_{t_1}^{2t_1} n(t)\,dt + \ldots + \int\limits_{pt_1}^{t-\frac{\varepsilon_0 x}{q}} n(t)\,dt\right],$$

$$\text{for}\quad pt_1\leqslant t<(p+1)t_1$$

The way how determine the distribution of porosity $\varepsilon(x,t)$ is shown on the example $t_1\leqslant t<2t_1$. Let us notice that $t-\frac{\varepsilon_0 x}{q}\geqslant t_1$, occurs for $x\leqslant\frac{q}{\varepsilon_0}(t-t_1)$. Formula (16) will have the form (see (13'), (13''))

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 - \alpha q e^{-\alpha x}\left[\int\limits_0^{t_1} n_0\,dt + \int\limits_{t_1}^{t-\frac{\varepsilon_0 x}{q}}\left[n_0 - n_0\left(1-e^{-\alpha L}\right)\left(1-e^{-a(t-t_1)}\right)\right]dt\right] =$$

$$= \varepsilon_0 - \alpha^{qe^{-\alpha x}} n_0\left[t-\frac{\varepsilon_0 x}{q}-\left(1-e^{-\alpha L}\right)\left(t-t_1-\frac{\varepsilon_0 x}{q}-\frac{1-e^{-a\left(t-t_1-\frac{\varepsilon_0 x}{q}\right)}}{a}\right)\right]$$

For $x > \frac{q}{\varepsilon_0}(t-t_1)$ we have $0 \leqslant t - \frac{\varepsilon_0 x}{q} < t_1$. Thus

$$\varepsilon(x,t) = \varepsilon_0 - \alpha q e^{-\alpha x} \int_0^{t-\frac{\varepsilon_0 x}{q}} n_0\, dt = \varepsilon_0 - \alpha q e^{-\alpha x} n_0 \left(t - \frac{\varepsilon_0 x}{q}\right).$$

Pressure in the medium can be determined using the equation of motion

$$\frac{\partial h(x,t)}{\partial x} = -\frac{\gamma q}{[\varepsilon(x,t)]^3} \tag{17}$$

where:

γ is a certain constant.

We assume that the pressure at poit $x = L$ is constant and equal to h_L, i.e.

$$h(L,t) = h_L \tag{18}$$

Taking condition (18) into account we integrate formula (17) and obtain the dependence

$$h(x,t) = h_L + \int_x^L \frac{\gamma q dx}{[\varepsilon(x,t)]^3}$$

Introducing formula (16) into above equality, we obtain functions of the pressure distribution in the form of

$$h(x,t) = \mathrm{h}_L + \int_x^L \frac{\gamma q dx}{\left(\varepsilon_0 - \alpha q e^{-\alpha x} \int_0^{t-\frac{\varepsilon_0 x}{q}} n(t)\, dt\right)^3} \tag{19}$$

where $n(t)$ is given by formula (13).

5. Appendix

The solution of equation (10) using the Laplace transform

Let us denote the Laplace transform of function $n(t)$ by $F(s)$. On the basis of the original differentiation theorem we have

$$n'(t) = sF(s) - n_0$$

and using the theorem of original shift the following occurs

$$n_1(t) = e^{-t_1 s} F(s) + n_0 e^{\alpha L} \frac{1}{s}\left(1 - e^{-t_1 s}\right).$$

Operational equation

$$sF(s)-n_0 = ae^{-\alpha L}e^{-t_1 s}F(s)-aF(s)+an_0\frac{1}{s}\left(1-e^{-t_1 s}\right)$$

corresponds to the equation (10).
Hence

$$F(s)=\frac{n_0 s+an_0\left(1-e^{-t_1 s}\right)}{s\left(s+a-ae^{-\alpha L}e^{-t_1 s}\right)}=\frac{n_0}{s}-n_0 a\left(1-e^{-\alpha L}\right)\frac{e^{-t_1 s}}{s\left(s+a-ae^{-\alpha L}e^{-t_1 s}\right)}=$$

$$=\frac{n_0}{s}+\frac{n_0 a\left(1-e^{-\alpha L}\right)}{s(s+a)}\frac{e^{-t_1 s}}{1-\dfrac{ae^{-\alpha L}e^{-t_1 s}}{s+a}}$$

To determine the transform inverse to function $F(s)$ we develop it into power series. The following occurs

$$F(s)=\frac{n_0}{s}+n_0\left(1-e^{-\alpha L}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{k+1}e^{-\alpha kL}e^{-t_1(k+1)s}}{s(s+a)^{k+1}}$$

Basing on the theorems of transform shift and original shift we have

$$\frac{1}{(s+a)^{k+1}}=\frac{1}{k!}t^k e^{-at}$$

$$\frac{e^{-t_1(k+1)s}}{(s+a)^{k+1}}=\frac{1}{k!}\left[t-(k+1)t_1\right]^k e^{-a[t-(k+1)t_1]}\eta\left(t-(k+1)t_1\right)$$

Then, using the theorem of original integrating we obtain

$$\frac{e^{-t_1(k+1)s}}{s(s+a)^{k+1}}=\frac{1}{k!}\int_0^t\left[t-(k+1)t_1\right]^k e^{-a[t-(k+1)t_1]}\eta\left(t-(k+1)t_1\right)dt=$$

$$=\frac{1}{k!}\int_{(k+1)t_1}^{t}\left[t-(k+1)t_1\right]^k e^{-a[t-(k+1)t_1]}dt=\frac{1}{k!}\int_0^{t-(k+1)t_1}t^n e^{-at}dt$$

Applying the above relations we get function $n(t)$ as a transform inverse to function $F(s)$ given by formula (11). The following is obtained

$$n(t)=n_0-n_0\left(1-e^{-\alpha L}\right)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{k+1}e^{-\alpha kL}}{k!}\eta\left(t-(k+1)t_1\right)\int_0^{t-(k+1)t_1}t^k e^{-at}dt$$

This work was sponsored by KBN (Scientific Research Committee) under project 9 T 12 A 01016.

REFERENCES

Trzaska A., 1983. The Effect of Colmatage on the Porosity of Heterogeneous Porous Media. Archives of Mining Sciences, 28, 1, 3—11.

Trzaska A., Sobowska K., 2000. Process of Colmatage in Porous Medium with Closed Circulation of Suspension. Archives of Mining Sciences, 45, 117—123.

REVIEW BY: PROF. DR HAB. INŻ. JERZY LITWINISZYN, KRAKÓW

Received: 14 February 2000.