

ZBIGNIEW KOKESZ\*

## **Trudności i ograniczenia w geostatystycznym modelowaniu zmienności złóż i szacowaniu zasobów metodą krigingu**

### **Słowa kluczowe**

Złóża kopalin stałych, obliczanie zasobów, geostatystyka

### **Streszczenie**

W artykule zwrócono uwagę na ograniczenia i trudności w praktycznym wykorzystaniu metod geostatystycznych przy geologicznym dokumentowaniu złóż. Omówiono w nim takie czynniki, jak: liczebność obserwacji i ich sposób rozmieszczenia, błędy związane z pomiarem parametrów oraz opracowaniem zbiorów danych, anizotropia i niejednorodność złoża, umiejętność i doświadczenie dokumentatora w zakresie stosowania metod geostatystycznych.

Wyprowadzone wnioski dotyczą metodyki badania struktury zmienności złóż i wykorzystania wyników tych badań przy dokumentowaniu zasobów. Dotychczasowa praktyka wskazuje na potrzebę głębszego analizowania struktury zmienności parametrów złożowych, a także na konieczność wszechstronnej interpretacji wyników tych badań. Występowanie niejednorodności lub silnej anizotropii zmienności złoża winno być uwzględnione w szacowaniu zasobów. Modelowanie struktury zmienności parametrów złożowych powinno być poprzedzone szczegółową analizą statystyczną danych obejmującą również badanie współzależności między parametrami. Niezbędna jest również wcześniejsza weryfikacja przyjmowanych do obliczeń modeli wariogramów parametrów złożowych za pomocą techniki zwanej oceną krzyżową.

### **Wprowadzenie**

Problematyka zmienności parametrów złożowych odgrywa istotną rolę w praktycznym rozwiązywaniu zadań związanych z prowadzeniem działalności geologiczno-górnicznej na

---

\* Dr inż., Zakład Geologii Złożowej i Górniczej, Akademia Górniczo-Hutnicza, Kraków.

złożu. Dysponowanie matematycznym opisem zmienności jest nieodzowne do rozwiązywania wielu zagadnień.

Dotychczas zaproponowano szereg formuł opisu zmienności parametrów złożowych, wychodząc z różnych modeli zmienności. Szczególnie atrakcyjną metodę opisu stanowi geostatystyka. Metodykę badania zregionalizowanych zmiennych losowych określaną jako geostatystyka opracował Matheron, wprowadzając do opisu ich zróżnicowania wariogram określane też jako funkcja strukturalna, charakteryzuje on bowiem strukturę zmienności parametru w zależności od odległości między obserwacjami (np.. Armstrong 1998; Journel, Huijbregts 1978).

Stosowanie wariogramów w badaniach złóż przynosi wiele korzyści. Znajomość funkcji strukturalnych parametrów złożowych umożliwia podejmowanie decyzji co do sposobu interpretacji przebiegu granic złoża, obliczenia zasobów, a także celowości sporządzania map izolinowych. Znajomość wariogramów umożliwia stosowanie kriginu w ocenie jakości kopaliny i szacowaniu zasobów.

Podstawową procedurą geostatystyczną jest kriging zwykły (ordinary kriging). Metoda ta umożliwia dokonywanie ocen wartości parametrów złożowych z możliwie najmniejszym błędem. Omówienie tej metody znaleźć można w wielu publikacjach z zakresu geostatystyki (np. Armstrong 1998; Journel, Huijbregts 1978; Kokesz, Nieć 1992; Mucha 1994).

Stosowanie procedury kriginu w obliczaniu zasobów wymaga znajomości charakteru zmienności podstawowych parametrów złożowych. Informacji na ten temat dostarczają wariogramy  $\gamma(h)$ . Funkcje  $\gamma(h)$  oblicza się dla poszczególnych parametrów złożowych na podstawie wyników ich pomiaru we wszystkich punktach obserwacyjnych, tj. otworach wiertniczych i wyrobiskach górniczych. Funkcje te przedstawiają zróżnicowanie wartości parametrów w zależności od odległości między punktami pomiaru, a zatem strukturę ich zmienności, i w sposób pośredni charakteryzują autokorelację między obserwacjami. Wariogramy empiryczne aproksymuje się modelami teoretycznymi, które następnie wykorzystuje się do wyliczenia wartości współczynników wagowych przypisywanych poszczególnym obserwacjom przy szacowaniu średnich wartości parametrów złożowych. W procedurze kriginu średnie wartości określa się bowiem jako średnie ważone.

W artykule przedstawiono ograniczenia i trudności w praktycznym wykorzystaniu metod geostatystycznych przy geologicznym dokumentowaniu złóż kopalni stałych.

Na niektóre uwarunkowania stosowania metod geostatystycznych zwracano już wcześniej uwagę (np. Kokesz, Mucha 1987; Kokesz 2000; Mucha 2001). Niniejsza praca stanowi kontynuację badań prowadzonych nad tym zagadnieniem. Poruszana tematyka ma zasadnicze znaczenie dla uściślenia zakresu i zasad stosowania procedury kriginu w rutynowych czynnościach związanych z geologicznym dokumentowaniem złóż.

## 1. Charakterystyka czynników warunkujących stosowanie metod geostatystycznych w dokumentowaniu złóż

Wiarygodność wariogramów konstruowanych na etapie modelowania zmienności złóż w znacznym stopniu wpływa na dokładność obliczeń realizowanych metodą krigingu. Reprezentatywność tych funkcji zależy od wielu czynników, spośród których istotne znaczenie mają: liczebność obserwacji i ich rozmieszczenie, błędy związane z pomiarem parametrów i opracowaniem zbiorów obliczeniowych, anizotropia i niejednorodność złoża, a także umiejętność i doświadczenie dokumentatora w zakresie stosowania metod geostatystycznych.

### 1.1. Liczebność obserwacji i ich rozmieszczenie

Podstawowym źródłem informacji o złożu są wyrobiska wykonywane w celu jego rozpoznania. Ich rodzaj, usytuowanie, liczebność warunkują stopień poznania rzeczywistej struktury zmienności parametrów złożowych.

W praktyce wariogramy empiryczne konstruuje się na podstawie wyników obserwacji i pomiarów wykonywanych w wyrobiskach rozpoznawczych. Obliczenia wykonuje się więc na ściśle zlokalizowanym, ograniczonym zbiorze danych, którego liczebność warunkowana jest zarówno wielkością złoża, jak i stopniem jego rozpoznania. W porównaniu z rozmiarami złoża są to informacje punktowe.

Konstruowane na podstawie tych danych wariogramy empiryczne w sposób mniej lub bardziej dokładny charakteryzują zróżnicowanie wartości parametrów złoża, stanowią zatem jedynie przybliżenie właściwych rzeczywistych wariogramów parametrów.

Należy oczekiwać, że różnice pomiędzy empirycznymi a teoretycznymi wariogramami będą maleć wraz ze wzrostem liczebności obserwacji. Jeśli dysponujemy nielicznymi punktami rozpoznawczymi, postać wariogramu jest praktycznie nieznaną.

Wariogramy można więc konstruować, gdy jest dostatecznie dużo obserwacji. Przyjmuje się, że reprezentatywność funkcji strukturalnej  $\gamma(h)$  osiąga się wtedy, gdy poszczególne jej wartości zostały wyliczone w oparciu o co najmniej 30 par danych (np. Journel, Huijbregts 1978). Ponieważ wraz ze wzrostem odległości między obserwacjami liczba par danych na podstawie której określa się kolejne wartości wariogramu maleje, obliczenia tych funkcji powinny być kontynuowane tylko do pewnej wartości argumentu  $\gamma(h)$ . Wariogram powinien być więc konstruowany w oparciu o dostateczną liczbę obserwacji i wyliczany jedynie do połowy odległości założonych linii rozpoznawczych. Praktyka dowodzi, że dla przeprowadzenia obliczeń zbioru danych powinien obejmować co najmniej 25—30 obserwacji (Kokesz 1988).

Warunek ten na ogół bywa spełniony już przy rozpoznawaniu złóż w kat.  $C_2$  (Kokesz 1988). Jedynie w przypadku dokumentowania małych złóż (np. złóż kruszywa naturalnego), w początkowym stadium ich badania, tj. w kat.  $C_2$ , liczebność obserwacji bywa często zbyt mała do konstrukcji reprezentatywnych wariogramów. Liczba otworów bywa wówczas

niewystarczająca dla zbadania anizotropii zmienności parametrów złożowych oraz niejednorodności złoża. Szczególnie trudne warunki modelowania zmienności występują przy dokumentowaniu złóż o silnie wydłużonej formie. Nie ogranicza to jednak całkowicie możliwości stosowania w takich przypadkach procedury krigingu. Niepewność co do wiarygodności przyjmowanych do obliczeń wariogramów oraz założeń odnośnie do izotropii i jednorodności złoża znajduje bowiem uzasadnienie w stosunkowo niskich wymaganiach dotyczących dokładności oceny zasobów w kat. C<sub>2</sub>.

W przypadku dokumentowania małych złóż przy modelowaniu struktury ich zmienności szczególnie wskazane jest stosowanie techniki zwanej oceną krzyżową (*cross-validation*). Umożliwia ona na ogół ustalenie optymalnych modeli wariogramów opisujących zmienność parametrów złoża (Clark 1986). Technika ta polega na szacowaniu metodą krigingu punktowego wartości parametru złożowego w poszczególnych punktach pomiarowych przy różnych modelach struktury jego zmienności. W technice tej zakłada się, że wartość parametru w ocenianym punkcie nie jest znana i do jej oszacowania wykorzystuje się informacje z najbliższej położonych obserwacji. Weryfikacji wyników dokonuje się przez porównanie różnic między oszacowanymi i stwierdzonymi wartościami a wielkościami ustalonych błędów krigingu. Porównanie wyników ocen dokonywanych przy różnych modelach wariogramów pozwala najczęściej na wybór optymalnego, który najlepiej opisuje strukturę zmienności parametru.

W przypadku złóż bardzo małych zastosowanie metod geostatystycznych może być bardzo utrudnione lub wręcz niemożliwe ze względu na nieliczne dane do konstrukcji wiarygodnych wariogramów.

W skrajnych przypadkach, rozpoznania złóż za pomocą kilku—kilkunastu otworów, należałoby szukać możliwości interpretacji wariogramów w metodzie analogii opierając się na wynikach badań geostatystycznych przeprowadzonych na innych złożach o podobnej budowie geologicznej i genezie. Jak wynika z dotychczasowych badań zmienności krajowych złóż kopaliny stałych (Nieć, Mucha, Kokesz 1988), postać wariogramu i jego parametry warunkowane są budową geologiczną złoża i znajdują wy tłumaczenie w procesach prowadzących do ich powstania. Ponadto parametry wariogramów są w znacznym stopniu uzależnione od parametrów statystycznych zmienności (Kokesz 2006, Mucha 2002). Znajomość ogólnej zmienności parametrów badanego złoża, jego budowy geologicznej i procesów formujących go, a także współzależności wiążących parametry geostatystyczne i statystyczne zmienności, winny więc umożliwiać interpretację przebiegu wariogramu.

Wykorzystanie badań geofizycznych powierzchniowych w geologicznych pracach rozpoznawczych stwarza możliwość pozyskania dodatkowych informacji o strukturze zmienności złoża. Ma to szczególnie istotne znaczenie w przypadku złóż rozpoznanych niewielką liczbą wyrobisk. Istnieje wówczas możliwość wykorzystania wyników tych badań do skonstruowania wiarygodnego modelu struktury zmienności złoża i oszacowania jego zasobów (Kokesz, Kotowski, Mucha 2002).

W praktyce często obserwuje się, że wartości parametrów złoża w blisko siebie położonych punktach rozpoznawczych są wzajemnie skorelowane, przy czym w miarę zwiększania

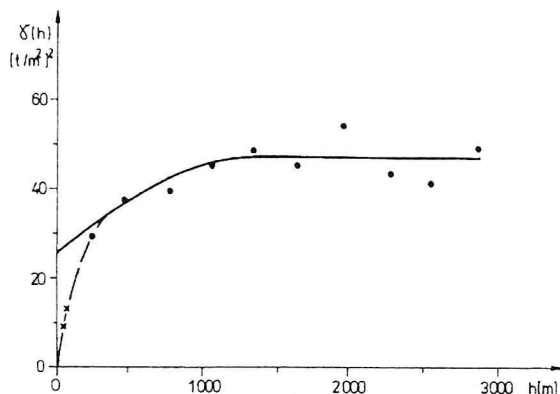
się odległości między punktami obserwacji korelacja ta maleje. Jeśli rozstaw punktów rozpoznania przekracza zasięg autokorelacji, wówczas obserwacje w tych punktach zachowują się jako zmienne niezależne.

Można zatem w praktyce oczekiwać silnego autoskorelowania obserwacji parametrów złożowych w warunkach rozpoznania gęstą siecią punktów rozpoznania i niemalże losowego ich modelu zmienności w sytuacji, gdy punkty rozpoznawcze są znacznie od siebie oddalone. Należy tu jednak zaznaczyć, że zależność występująca pomiędzy gęstością sieci rozpoznawczej a strukturą zmienności złoża ma bardziej złożony charakter. Uzyskiwany za pomocą wariogramów obraz struktury zmienności złoża zależy w znacznym stopniu od skali obserwacji, a zatem od wielkości badanego obiektu (np. Journel, Huijbregts 1978). W zależności od rozmiarów analizowanych fragmentów złoża na obserwowaną zmienność mają wpływ różne jej poziomy (zmienność w granicach agregatu mineralnego, ciała rudnego, złoża itp.), które łącznie określają strukturę zmienności parametrów złożowych. W efekcie zasięgi autokorelacji obserwowane na mniejszych obszarach mogą różnić się od rejestrowanego w granicach całego złoża (Kokesz 2006).

Gęstość sieci rozpoznawczej warunkuje dokładność poznania zróżnicowania parametrów złożowych na małych odległościach. W zależności od rozstawu punktów rozpoznawczych w różnym stopniu wykrywana jest zmienność lokalna złoża. W przypadku złóż rozpoznanych wyrobiskami rozmieszczonymi w układzie sieciowym określenie rzeczywistej wielkości  $C_0$ , charakteryzującej zmienność parametrów złożowych na odległościach znacznie mniejszych od stosowanego rozstawu punktów rozpoznawczych (rys. 1), napotyka na znaczne trudności. Na ogół wartości  $C_0$  wyznacza się w sposób arbitralny z wykresu wariogramu na podstawie znajomości jego przebiegu na większych odległościach. Ustalone drogą ekstrapolacji przebiegu wariogramów wartości  $C_0$  są obarczone mniejszym lub większym błędem, co z kolei wpływa na wyniki szacowania zasobów procedurą krigingu. Zaleca się zatem, o ile to możliwe, wykonywanie na etapie rozpoznawania złóż pewnej ilości wyrobisk odległych od siebie mniej niż rozstaw podstawowy w celu pozyskania informacji o strukturze zmienności złoża na małych odległościach. Powinno to przyczynić się do zwiększenia dokładności szacowania zasobów procedurą krigingu.

W warunkach złóż rozpoznanych rzadką siecią otworów interpretacja wartości  $C_0$  z przebiegu wykresów wariogramów prowadzi często do zawyżania wielkości zróżnicowania parametrów w zakresie małych odległości. Świadczą o tym rezultaty analizy struktury zmienności złoża siarki rodzimej Osiek przedstawione na rysunku 1, a potwierdzają wyniki oceny lokalnej zmienności zawartości metali w górnośląskich złożach rud cynku i ołowiu (Mucha 1998, 2002).

W celu scharakteryzowania zmienności złoża siarki Osiek obliczono wariogramy zasobności oddzielnie na podstawie danych z wierceń wykonanych w kat.  $C_1$  i otworów eksploatacyjnych. Zwraca uwagę wyraźna rozbieżność w ocenie lokalnej zmienności złoża opartej na analizie jego rozpoznania w warunkach rzadkiej i gęstej sieci rozpoznawczej.



Rys. 1. Wpływ gęstości sieci rozpoznawczej na obserwowaną wielkość zmienności lokalnej złoża (złoże siarki rodzimej Osiek).

Linia ciągła przedstawia model wariogramu zasobności złoża określony wyłącznie na podstawie danych z otworów w kat.  $C_1$ , a linia przerywana model wariogramu parametru przy uwzględnieniu informacji z otworów eksploatacyjnych (w kat. A)

Fig. 1. Influence of exploratory grid density on observed value of local variability (Osiek native sulphur deposit).

The line displays sulphur accumulation variogram model defined on the basis of preliminary exploration vertical drillholes (drilled for  $C_1$  category) and dotted line presents the variogram model constructed from exploitation boreholes (for category A)

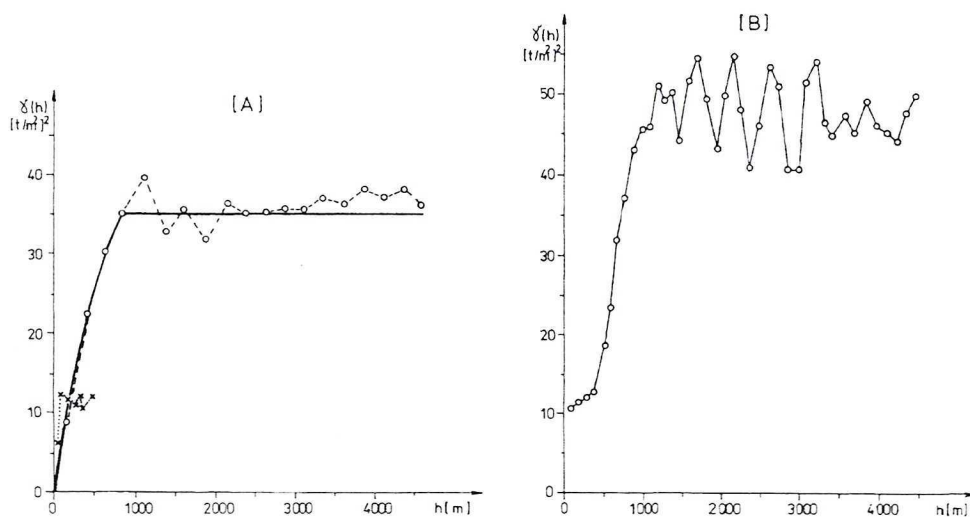
Często zdarza się, że poszczególne części złoża rozpoznane są w różnym stopniu. Stanowi to dogodną sytuację do konstrukcji bardziej wiarygodnego wariogramu. Istnieje wówczas możliwość ustalenia geostatystycznego modelu zmienności parametru złoża na podstawie danych pozyskanych z wyrobisk wykonanych w rzadszej sieci oraz z zagęszczonych punktów rozpoznawczych. Prowadzi to jednak do przyjęcia założenia, że struktura zmienności parametrów złoża jest taka sama w poszczególnych jego częściach. Założenie takie może być niekiedy zbyt dużym uproszczeniem.

Warunkiem poprawności obliczenia zasobów jest właściwy dobór modelu wariogramu, który musi być dokonany przez geologa dokumentującego na podstawie wnikliwej analizy wyników rozpoznania złoża. Analiza ta winna obejmować między innymi badanie rozkładów i wariogramów parametrów złoża w poszczególnych jego częściach, a także studium map izolinii parametrów. Niezbędna jest również weryfikacja przyjmowanych do obliczeń modeli wariogramów za pomocą wspomnianej już wcześniej techniki zwanej oceną krzyżową. Zbyt pochopne decyzje mogą bowiem prowadzić do błędów w interpretacji struktury zmienności parametrów, a tym samym do błędów w ocenie zasobów złoża.

Jako nadal aktualny przykład służyć mogą wyniki analizy zmienności złoża siarki rodzimej Basznia (Kowalik i in. 1990). Złożo to rozpoznane zostało w kat.  $C_1$  za pomocą otworów wiertniczych rozmieszczonych co 200—500 m. Łącznie wykonano 172 otwory (w 142 stwierdzono obecność wapieni osiarkowanych). Tylko niewielki fragment złoża

został rozpoznany w kat. A gęstą siecią otworów o boku 45 m. W tej kategorii odwiercono łącznie 70 otworów.

Na rysunku 2 przedstawiono wyniki interpretacji struktury zmienności zasobności złoża. Z uwagi na obszarowe zróżnicowanie gęstości sieci rozpoznawczej, do skonstruowania geostatystycznego modelu zmienności złoża wykorzystano wariogramy wyliczone oddzielnie w oparciu o dane z otworów wykonanych w kat. A i kat. C<sub>1</sub>. Na podstawie znajomości przebiegu tych wariogramów dokonano opisu struktury zmienności parametru w granicach całego złoża. Skonstruowany na podstawie tych funkcji model wariogramu w sposób bardziej wiarygodny opisuje strukturę zmienności zasobności. Wariogram wyliczony w oparciu o dane ze wszystkich otworów, a więc wykonanych zarówno w kat. A jak i w kat. C<sub>1</sub>, wyraźnie od niego odbiega. Obserwuje się między innymi zróżnicowanie amplitudy wariogramów, czyli wartości, przy których następuje stabilizacja ich wykresów. Przyczyny tego należy upatrywać w specyficznym rozmieszczeniu otworów eksploatacyjnych wykonanych w kat. A. Były one bowiem usytuowane w bogatszej części złoża. Wyliczony na podstawie wszystkich otworów bilansowych wariogram dał więc zniekształcony, nie-



Rys. 2. Przykład interpretacji struktury zmienności złoża w warunkach zróżnicowanej gęstości sieci rozpoznawczej (złoże siarki rodzimej Basznia)

A — model struktury zmienności zasobności złoża określony z przebiegu wariogramów wyliczonych w oparciu o dane z otworów eksploatacyjnych (linia kropkowana) i rozpoznawczych w kat. C<sub>1</sub> (linia kreskowana), B — wariogram zasobności złoża obliczony na bazie danych z otworów wykonanych w kat. A (eksploatacyjnych) i w kat. C<sub>1</sub>

Fig. 2. An example of interpretation of deposit variability structure when density of exploratory grid is nonstable.

A — model of sulphur accumulation variability structure obtained by interpretation of experimental variograms calculated from exploitation boreholes (dotted line) and exploration holes drilled in C<sub>1</sub> category (dash line), B — sulphur accumulation variogram calculated from exploitation (productive) boreholes (drilled for A category) and exploratory holes drilled for category C<sub>1</sub>

prawdziwy obraz zmienności parametru w granicach całego złoża i w związku z tym nie został uwzględniony w obliczeniach krigingiem (Kowalik i in. 1990).

Przykład przedstawiony na rysunku 2 dobrze ilustruje wcześniej już opisane zjawisko skali obserwacji. Zwraca uwagę wyraźne zróżnicowanie zasięgów wariogramów skonstruowanych dla całego złoża i małego jego fragmentu rozpoznanego w kat. A. Przykład ten ukazuje jednocześnie, że obserwowana na wariogramach zmienność lokalna parametru uzależniona jest od gęstości sieci rozpoznawczej. W zależności od tej gęstości w różnym bowiem stopniu wykrywana jest zmienność lokalna. Zwrócił już na to dużo wcześniej uwagę Czetwierikow (1968).

Na wiarygodność uzyskiwanego obrazu struktury zmienności złoża ma wpływ sposób rozmieszczenia obserwacji. Rozpoznanie tendencyjne polegające na preferowaniu przy wyborze lokalizacji otworów (miejsc pobrania próbek) uboższych lub bogatszych partii złoża może prowadzić do znacznych błędów w interpretacji struktury jego zmienności, a w konsekwencji również do błędów w ocenie jego zasobów. Systematyczno-losowy (sieciowy) czy też losowy sposób rozmieszczenia punktów rozpoznawczych pozwala najczęściej na wystarczająco dokładne dla celów praktycznych zbadanie struktury zmienności złoża. Mniej korzystnym sposobem rozmieszczenia obserwacji jest ich usytuowanie w sposób nierównomierny (gniazdowy). Na ogół w celu scharakteryzowania zmienności konieczne jest wówczas obliczanie tzw. wariogramów *inv-covariance*, które lepiej odzwierciedlają naturalną zmienność złoża w warunkach skrajnie nieregularnego rozmieszczenia danych (Isaaks, Srivastava 1988). Utrudnione warunki do sporządzania wariogramów stwarza także rozpoznanie złoża wyrobiskami górniczymi. Obserwacje są wówczas najczęściej rozmieszczone również w sposób nierównomierny na obszarze złoża, co często utrudnia ustalenie poprawnych geostatystycznych modeli zmienności parametrów złożowych.

Wariogramy sporządzane w warunkach skrajnie nieregularnego rozmieszczenia danych mogą nieraz znacznie odbiegać od rzeczywistych. Zwracano już na to uwagę (np. Armstrong 1984; Cressie, Hawkins 1980). Nieregularne rozmieszczenie obserwacji może na przykład prowadzić do pojawienia się w przebiegu wariogramów zjawiska okresowości. Nie ma ono wówczas geologicznego uzasadnienia, a wynika jedynie ze zbyt małej liczby par obserwacji użytych do obliczenia niektórych wartości wariogramu empirycznego.

W przypadku nieregularnego rozmieszczenia danych wskazane jest wykonanie kilku prób obliczeń wariogramów przy różnym kroku odległościowym grupowania danych w celu sprawdzenia stabilności uzyskiwanych funkcji i wybrania optymalnego modelu opisującego zmienność badanego parametru.

## 1.2. Błędy związane z pomiarem parametrów i opracowaniem zbiorów obliczeniowych

Na postać wariogramów parametrów złożowych mają wpływ błędy grube popełniane w trakcie przygotowywania zbiorów danych. Zwykle są one niezamierzone, losowe i związane z błędnym wpisaniem danych, błędnym wykonaniem obliczeń (np. analiz chemicznych,



parametrów wtórnych). Ich przyczyną mogą też być pomyłki w numeracji próbek lub w ich klasyfikacji. Wprowadzenie na przykład do zbioru obserwacji nienależącej do badanej populacji, w wyniku błędnej klasyfikacji próbki (np. wyników analiz próbek pobranych z odmiennego typu kopaliny lub z przerostów płonnych) może w znacznym stopniu wpłynąć na obserwowaną zmienność parametru.

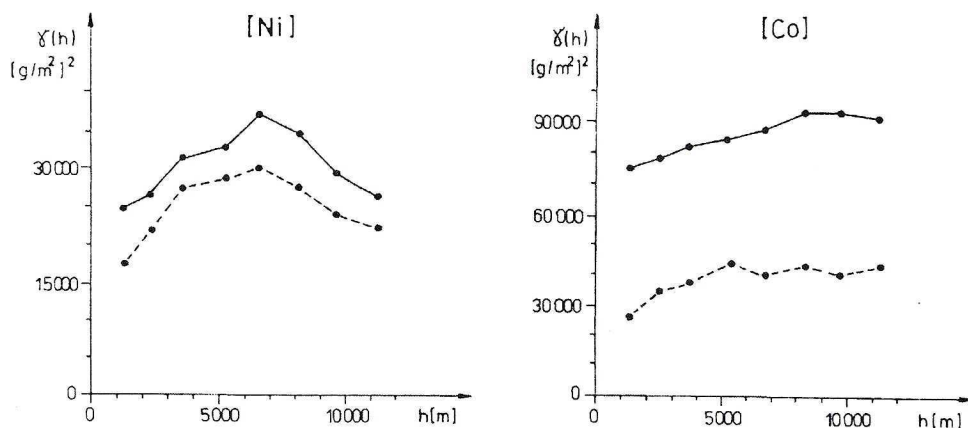
Występowanie wartości odbiegających prowadzi do zniekształcenia przebiegu właściwego wariogramu parametru i może znacznie rzutować na wyniki ocen dokonywanych metodą krigingu. W literaturze zagranicznej znaleźć można przykłady ilustrujące wpływ takich wartości na postać wariogramów (np. Armstrong 1984; Cressie, Hawkins 1980). O występowaniu błędów grubych najlepiej wnioskować na podstawie analizy histogramów. Toteż geostatystyczne modelowanie struktury zmienności winno być poprzedzone wnikliwą analizą statystyczną danych. W przypadku stwierdzenia pomyłek konieczne jest wyeliminowanie błędnie wpisanych wartości ze zbiorów obliczeniowych.

Występowanie obserwacji znacznie odbiegających od pozostałych może mieć jednak uzasadnienie w charakterze analizowanych danych. W złożach rud metali czasem spotyka się próbki z nadmiernie wysoką mineralizacją, tzw. próbki huraganowe. Ich występowanie jest wynikiem naturalnej zmienności złoża będącej odzwierciedleniem procesów genetycznych prowadzących do jego uformowania. Przykładem mogą być złoża rud miedziowo-srebrowych, w których obserwuje się niekiedy nienormalnie wysokie zawartości pierwiastków towarzyszących w próbkach. Przekraczają one wówczas nawet kilkudziesięciokrotnie ich średnie koncentracje w rudzie. Jak dotąd nie zostały opracowane ścisłe zasady postępowania przy modelowaniu zmienności i ocenie parametrów charakteryzujących się nadmiernie wysokimi wartościami. Na ogół przy ocenie średniej zawartości pomija się próbki anomalne, jeśli są one sporadyczne i odosobnione.

Wpływ próbek huraganowych na postać wariogramów zilustrowano na rysunku 3. Przedstawiono na nim wyniki geostatystycznej analizy struktury zmienności zasobności niklu i kobaltu w złożu rud miedziowo-srebrowych Głogów Głęboki (Kokesz 1998). Zwraca uwagę wyraźne obniżenie amplitudy wariogramów badanych pierwiastków po odrzuceniu zawartości anomalnych. Wariogramy sporządzone na podstawie wszystkich danych i po wyeliminowaniu wartości odbiegających znacznie różnią się między sobą. Do podobnych spostrzeżeń prowadzi analiza innych złóż LGOM rozpoznanych wyrobiskami górnictwami (Mucha 2001; Mucha J., Stala-Szlugaj 2002; Piestrzyński i in. 1998).

Na reprezentatywność wariogramów mają również wpływ błędy popełniane przy pomiarze parametrów złożowych. Błędy pomiarów, w zależności od tego czy są to błędy przypadkowe czy systematyczne, w różny sposób wpływają na obserwowaną strukturę zmienności parametrów złożowych i wynik oceny zasobów.

Błędy przypadkowe sprawiają, że wyliczone wartości wariogramu są większe od rzeczywistych (rys. 4). W obserwowanej zmienności parametru zaznacza się większy udział zmienności losowej. Wariogramy wraz ze zmniejszaniem się odległości między obserwacjami zdążają do wielkości  $C_0$ , która wówczas charakteryzuje nie tylko zmienność lokalną parametru, ale również błędy pomiaru parametru.

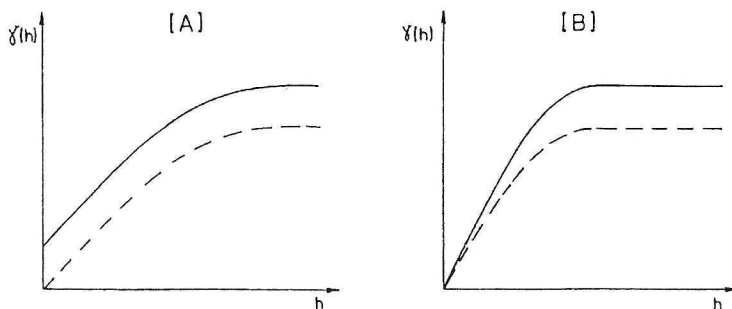


Rys. 3. Wpływ próbek huraganowych na postać wariogramów (na przykładzie zasobności niklu [Ni] i kobaltu [Co] w złożu rud miedziowo-srebrowych Głogów Głęboki).

Linia ciągła przedstawia wariogram obliczony na podstawie wszystkich danych, a linia przerywana wariogram ustalony po wyeliminowaniu wartości anomalnych

Fig. 3. Influence of extreme values on observed shapes of variograms (nickel [Ni] and cobalt [Co] accumulation for Głogów Głęboki copper-silver ore deposit are presented).

The line displays the variogram calculated from all data and dashed line presents variogram obtained after removing abnormal values



Rys. 4. Wpływ błędów technicznych (pomiaru) na obserwowaną strukturę zmienności parametrów złożowych.

Linia ciągła przedstawia hipotetyczny model wariogramu parametru dla danych obciążonych błędem przypadkowym (A) lub systematycznym (B), a linia przerywana hipotetyczny model wariogramu po wyeliminowaniu tych błędów

Fig. 4. Influence of technical (measurement) errors on observed structure of deposit parameters variabilities. The line shows hypothetical variogram model of a parameter when there are random errors (A) or systematic errors (B) and dashed line presents hypothetical variogram after eliminating the errors

Błędy systematyczne mogą w różny sposób wpływać na obserwowaną strukturę zmienności parametru złoża w zależności od postaci współzależności występującej pomiędzy wynikami pomiaru a jego rzeczywistymi wielkościami. W przeciwieństwie do błędów przypadkowych, występowanie błędów systematycznych na ogół nie prowadzi do istotnych

różnic w interpretacji przebiegu wariogramów na odległościach mniejszych od rozstawu sieci rozpoznawczej (rys. 4). Wpływ błędów systematycznych na wynik obliczeń, jeśli tylko zostaną one wykryte, najlepiej wyeliminować korygując dane podstawowe przyjmowane do konstrukcji wariogramów.

### 1.3. Anizotropia i niejednorodność złoża

W dotychczasowej praktyce dokumentowania złóż często zakłada się izotropowy charakter zmienności parametrów złożowych, a w obliczeniach wykorzystuje się wariogramy uśrednione wielokierunkowe. Geostatystyczne modelowanie powinno obejmować badanie anizotropii zmienności złoża. W przypadku stwierdzenia wyraźnego kierunkowego zróżnicowania zmienności wskazane jest prowadzenie estymacji z uwzględnieniem anizotropowych modeli wariogramów parametrów złoża.

Badanie anizotropii wymaga jednak dysponowania dostateczną liczbą obserwacji, a zatem najczęściej jest ono możliwe w przypadku dokumentowania dużych złóż lub złóż rozpoznanych w wyższych kategoriach poznania. Jeśli złożo rozpoznane zostało niewielką liczbą wyrobisk, zbadanie wektorowego zróżnicowania zmienności jest praktycznie niemożliwe.

Zwrócić wypada tu uwagę, że różne mogą być typy anizotropii zmienności parametrów złożowych (np. Armstrong 1998; Journel, Huijbregts 1978). Skonstruowanie właściwego modelu opisującego anizotropową strukturę zmienności wymaga często dużego doświadczenia i dobrej znajomości geostatystyki. Dodatkową trudność powoduje fakt, że w dostępnych oprogramowaniach na ogół nie ma możliwości uwzględniania bardziej złożonych postaci wektorowego zróżnicowania struktury zmienności parametrów złożowych.

Stosowanie metody krigingu w jej podstawowej wersji\* wymaga przyjęcia pewnych założeń odnośnie do obiektu stanowiącego przedmiot oceny. Zgodnie z założeniem metody, przyjmuje się stacjonarność funkcji losowej opisującej zróżnicowanie wartości analizowanego parametru (np. Armstrong 1998; Journel, Huijbregts 1978). Zakłada się tym samym, że oczekiwana średnia jego wartość nie ulega zmianom w granicach złoża lub przynajmniej w granicach poszczególnych bloków obliczeniowych zasobów a także, że przebieg funkcji strukturalnej parametru jest identyczny w poszczególnych jego częściach. Wyrazem tego w praktycznych zastosowaniach krigingu jest uwzględnianie w obliczeniach jedynie uśrednionych wariogramów skonstruowanych dla całego złoża.

Skuteczność stosowania procedury krigingu zależy zatem od jednorodności złoża. Przez niejednorodność należy rozumieć zróżnicowanie struktury zmienności podstawowych parametrów złożowych lub średnich ich wartości w poszczególnych częściach złoża. Niejednorodność taka ujawnia się zatem występowaniem obszarów, na których wyliczone wariogramy parametru istotnie się różnią lub też obserwuje się obszarowe zróżnicowanie

---

\* Istnieją również inne odmiany krigingu, na przykład kriging uniwersalny. Metody te z uwagi na skomplikowane obliczenia są rzadziej wykorzystywane w praktyce. Omówienie tych metod znaleźć można m.in. w pracach Armstrong 1998; Journel, Huijbregts 1978.

średnich wartości parametrów złożowych. Na niejednorodność złoża wskazywać może obecność silnie zaznaczonego trendu w zróżnicowaniu wartości parametru, co przejawia się na wariogramach raptownym wzrostem ich wartości wraz ze zwiększaniem się odległości pomiędzy obserwacjami.

W przypadku gdy zmienność parametru złożowego ma charakter nielosowy można oczekiwać, że jego zróżnicowanie na niewielkich obszarach będzie dużo mniejsze niż w granicach całego złoża. W takich przypadkach małe fragmenty złóż — odpowiadające na ogół rozmiarom parcel wydzielanych do obliczeń zasobów — można najczęściej traktować za quasi-homogeniczne z uwagi na zróżnicowanie wartości parametrów złożowych, co z kolei upoważnia do stosowania w ich ocenie metody krigingu zwykłego.

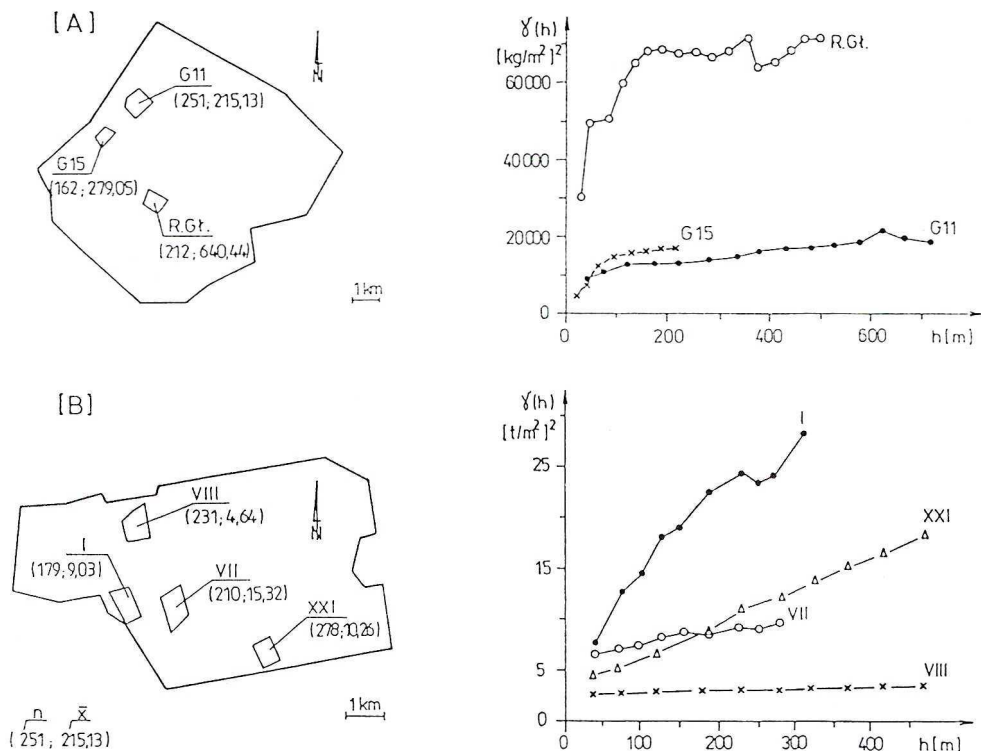
Na większych obszarach często jednak obserwuje się zróżnicowanie średnich wartości parametrów złożowych. Również najczęściej obecność wyraźnego trendu zaznacza się dopiero na większych obszarach, przekraczających znacznie rozmiary ocenianych parcel zasobowych. Wyniki badań złóż rud miedziowo-srebrowych (Namysłowska-Wilczyńska 1988, 1993), siarki rodzimej (Kokesz 1991) oraz węgla kamiennego (Kokesz 1990, 2006) dowodzą, że quasi-jednorodne partie mogą mieć różne rozmiary. W złożach rud miedziowo-srebrowych minimalne powierzchnie takich pól osiągają najczęściej 2 ha. Na innych badanych złożach są one większe.

Przedstawione na rysunku 5 wyniki badań wskazują, że przyjęcie założenia odnośnie stabilności struktury zmienności parametrów w granicach całego złoża bywa często zbyt dużym uproszczeniem. Zwracano na to już wcześniej uwagę (Kokesz 1990, 1991, 2006; Kokesz, Mucha 1987; Mucha 2001, 2002; Mucha, Wasilewska 2005). W niektórych przypadkach zróżnicowanie geostatystycznych modeli opisujących zmienność parametrów w różnych partiach złoża nie pozwala na ustalenie jednolitego modelu zmienności. Zróżnicowanie to dotyczyć może poszczególnych pól, pięter, poziomów kopalnianych, a także poszczególnych pokładów w przypadku złóż wielopokładowych.

Analiza wyników rozpoznania złoża powinna więc obejmować również ocenę jego jednorodności. Określenie jednorodności czy też niejednorodności złoża jest jednak trudnym zagadnieniem, wymagającym szczegółowej analizy danych. Badanie niejednorodności wymaga dysponowania dostatecznie dużą liczbą obserwacji. A zatem, jest ono możliwe na etapie dokumentowania dużych złóż zwłaszcza w wyższych kategoriach rozpoznania.

Wykrycie niejednorodności złoża niejednokrotnie umożliwia analiza rozkładów parametrów złożowych. Opracowanie statystyczne wyników rozpoznania winno zatem poprzedzać modelowanie struktury zmienności złoża. Podział złoża na części jednorodne powinien być jednak oparty na kryteriach geologicznych. Jak wynika bowiem z dotychczasowych badań, obserwowane obszarowe zróżnicowanie parametrów złożowych oraz struktury ich zmienności znajduje najczęściej odzwierciedlenie w budowie złoża (Kokesz 1990, 1991; Nieć, Mucha, Kokesz 1988). Pomocne w tym względzie mogą być mapy izolinii parametrów złoża, a także mapy trendów.

W przypadku stwierdzenia różnic w przebiegu wariogramów obliczonych dla wyróżnionych partii złoża celowe jest sprawdzenie, czy nie występuje efekt proporcjonalności



Rys. 5. Przykłady obszarowego zróżnicowania struktury zmienności parametrów złożowych.

A — zasobność Cu w złożu rud miedziowo-srebrowych kopalni Rudna,

B — zasobność złoża siarki rodzimej Jeziorko; N, NW, G15, VII — analizowane partie złoż.

$n$  — liczba danych,  $\bar{x}$  — średnia arytmetyczna wartość parametru

Fig. 5. Examples of variograms differentiation within deposits.

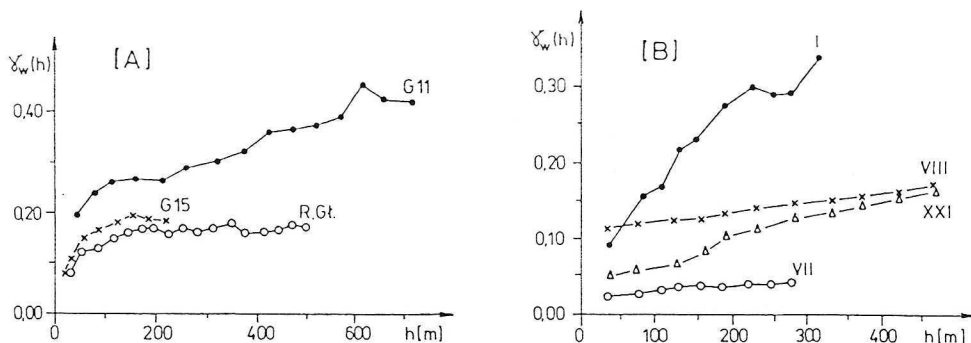
A — Cu accumulation for copper-silver ore deposit of Rudna mine, B — native sulphur accumulation

for Jeziorko deposit; N, NW, G15, VII — studied parts of the deposits;  $n$  — number of data,

$\bar{x}$  — arithmetic mean values of the parameters

(zależność pomiędzy wariancją i średnią wartością parametru). W praktyce wskazane jest wówczas konstruowanie tzw. wariogramów względnych (Cressie 1985). Zbliżony przebieg wariogramów względnych (relatywnych) wyliczonych dla partii złoża różniących się średnią wartością analizowanego parametru świadczy o występowaniu efektu proporcjonalności (np. Armstrong 1998; Journel, Huijbregts 1978). Przedstawione na rysunku 6 wyniki badań wskazują, że nie zawsze zróżnicowanie geostatystycznych modeli opisujących zmienność parametrów w różnych częściach złoża znajduje wytłumaczenie w tym zjawisku.

Jeżeli występuje efekt proporcjonalności, uzasadnione jest obliczanie zasobów procedurą krigingu w oparciu o ustalony dla całego złoża wariogram względny parametru. W przeciwnym przypadku, jeśli występują istotne różnice w wariogramach względnych, celowe wydaje się prowadzenie obliczeń tą metodą w wydzielonych quasi-homogenicznych czę-



Rys. 6. Badanie efektu proporcjonalności za pomocą wariogramów względnych.

A — zasobność Cu w złożu rud miedziowo-srebrnych kopalni Rudna,

B — zasobność złoża siarki rodzimej Jeziórko; N, NW, G15, VII — analizowane części złóż

Fig. 6. Study of a proportional effect with relative variograms.

A — Cu accumulation for copper-silver ore deposit of Rudna mine, B — native sulphur accumulation for

Jeziórko deposit; N, NW, G15, VII — studied parts of the deposits;  $n$  — number of data,

$\bar{x}$  — arithmetic mean values of the parameters

ściach złoża na podstawie wyliczonych wariogramów. Powinno to prowadzić do podwyższenia efektywności szacowania zasobów.

### Podsumowanie

Metody geostatystyczne znajdują coraz szersze zastosowanie w dokumentowaniu geologicznym złóż. Metody te wykorzystywane są przy ustalaniu modelu złoża, wyznaczaniu jego granic, charakterystyce jakości kopaliny, szacowaniu zasobów.

Efektywność stosowania tych metod zależy w znacznej mierze od wiarygodności konstruowanych modeli wariogramów parametrów złożowych. O reprezentatywności modeli wariogramów decyduje wiele czynników, spośród których istotne znaczenie mają liczebność obserwacji i sposób ich rozmieszczenia, błędy związane z pomiarem parametrów oraz opracowaniem zbiorów danych, anizotropia i niejednorodność złoża, umiejętność i doświadczenie dokumentatora w zakresie stosowania metod geostatystycznych. Liczebność obserwacji i ich rozmieszczenie warunkowane są z kolei formą złoża, sposobem jego rozpoznania i kategorią poznania.

Wymienione czynniki w różnym stopniu wpływają na wyniki geostatystycznego modelowania zmienności złóż i obliczeń dokonywanych metodą krigingu.

Dotychczasowa praktyka wskazuje na potrzebę głębszego analizowania struktury zmienności parametrów złożowych, a także na konieczność wszechstronnej interpretacji wyników tych badań. Występowanie silnej anizotropii zmienności złoża winno być uwzględnione w szacowaniu zasobów. W przypadku stwierdzenia niejednorodności złoża wskazane jest prowadzenie obliczeń metodą krigingu oddzielnie w partiach uznanych za jednorodne

w oparciu o ustalone dla nich modele wariogramów. Powinno przyczynić się to do zwiększenia efektywności szacowania tą metodą. Zaleca się zatem, o ile to możliwe, wykonywanie na etapie rozpoznawania złóż pewnej ilości wyrobisk odległych od siebie mniej niż rozstaw podstawowy w celu pozyskania informacji o strukturze zmienności złoża na małych odległościach. Powinno to przyczynić się do zwiększenia dokładności szacowania zasobów procedurą krigingu.

Modelowanie struktury zmienności parametrów złożowych winno być poprzedzone szczegółową analizą statystyczną danych obejmującą również badanie współzależności między parametrami. Stwarza to możliwość wstępnej oceny jakości zgromadzonej informacji o złożu, jego niejednorodności oraz występowania wartości anomalnych. Niezbędna jest również wcześniejsza weryfikacja przyjmowanych do obliczeń modeli wariogramów parametrów złożowych za pomocą techniki zwanej oceną krzyżową.

Praca wykonana w ramach badań statutowych nr 11.11.140.299 finansowanych przez KBN.

#### LITERATURA

- Armstrong M., 1984 — Common problems seen in variograms. *Mathematical Geology*, 16, 3, 305—313.
- Armstrong M., 1998 — *Basic Linear Geostatistics*. Springer, Berlin.
- Clark I., 1986 — The art of cross validation in geostatistical application. *Proceedings, 19th APCOM Symposium*, Penn State.
- Cressie N., 1985 — When are relative variograms useful in Geostatistics. *Mathematical Geology*, 17, 7, 693—702.
- Cressie N., Hawkins D.H., 1980 — Robust estimators of the variogram. *Mathematical Geology*, 12, 2, 115—126.
- Czetywierikow L., 1968 — *Teoreticzeskije osnovy modelirowania tjeł rudnych poljeznych iskopajemych*. Trudy Woroneżskowo Uniwersiteta, Woroneż.
- Isaaks E.H., Srivastava R.M., 1988 — Spatial continuity measures for probabilistic and deterministic geostatistics. *Mathematical geology*, 20, 4, 313—341.
- Journel A.G., Huijbregts C.H.J., 1978 — *Mining Geostatistics*. Academic Press, London.
- Kokosz Z., 1988 — Geostatystyczna procedura obliczania zasobów niesfaldowanych złóż węgla kamiennego. *Zeszyty Naukowe Politechniki Śląskiej*, s. Górn., z. 172, 59—77.
- Kokosz Z., 1990 — Struktura zmienności parametrów wybranych pokładów węgla z KWK Kazimierz-Juliusz. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, t. 6, z. 1, 97—105.
- Kokosz Z., 1991 — Geostatistical reserves estimation for native sulphur deposits mined by underground melting. *Science de la Terre*, ser. Inf., nr 31, Nancy, 223—238.
- Kokosz Z., 1998 — Geostatystyczna ocena zasobów. [W:] *Dokumentacja geologiczna złoża rud miedziowo-srebrowych Głogów Głęboki*. Państwowy Instytut Geologiczny, Warszawa, 74—85.
- Kokosz Z., 2000 — Efektywność stosowania metody krigingu w szacowaniu zasobów złóż. *Górnictwo Odkrywkowe*, nr 2—3, 77—93.
- Kokosz Z., 2006 — Geostatystyczna charakterystyka pokładów węgla w GZW. *Górnictwo Odkrywkowe*, nr 1—2, 66—75.
- Kokosz Z., Kotowski M., Mucha J., 2002 — Wykorzystanie badań geofizycznych i metod geostatystycznych przy dokumentowaniu złoża kopaliny skaleniowej. *Górnictwo Odkrywkowe*, nr 2—3, 42—47.
- Kokosz Z., Mucha J., 1987 — *Dotychczasowe doświadczenia w zastosowaniu metod geostatystycznych w geologii górniczej w Polsce*. Materiały Seminarium nt. *Metody matematyczne i technika komputerowa w górnictwie*, Szklarska Poręba, wyd. GIG, t. 3, 45—55.

- Kokesz Z., Nieć M., 1992 — Metody geostatystyczne w rozpoznawaniu i dokumentowaniu złóż oraz w ochronie środowiska. Studia i Rozprawy z. 19, CPPGSMiE PAN, Kraków.
- Kowalik J. i in., 1990 — Dokumentacja geologiczna złoża siarki rodzimej Basznia w kat. C<sub>1</sub> + A. Archiwum Przedsiębiorstwa Geologicznego w Kielcach.
- Mucha J., 1994 — Metody geostatystyczne w dokumentowaniu złóż. Wyd. AGH, Kraków.
- Mucha J., 1998 — Dekompozycja lokalnej zmienności zawartości metali w górnośląskich złożach Zn-Pb. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, t. 14, z. 2, 30—40.
- Mucha J., 2001 — Bariery i ograniczenia geostatystycznej oceny parametrów złożowych. *Zeszyty Naukowe AGH, Geologia*, t. 27, z. 2—4, 641—658.
- Mucha J., 2002 — Struktura zmienności zawartości Zn i Pb w śląsko-krakowskich złożach rud Zn-Pb. *Studia, Rozprawy, Monografie*; nr 108, IGSMiE PAN, Kraków.
- Mucha J., Stala-Szlugaj K., 2002 — Struktura zróżnicowania i dokładności szacowania zawartości Pb i Zn w złożu Cu-Ag Lubin. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, t. 18, z. 3, 29—51.
- Mucha J., Wasilewska M., 2005 — Dokładność interpolacji zawartości siarki i popiołu w wybranych pokładach węgla kamiennego GZW. *Gospodarka Surowcami Mineralnymi*, t. 21, z. 1, 5—21.
- Namysłowska-Wilczyńska B., 1988 — Application of kriging to the determination of homogenous blocks of Cu ore deposits. *Science de la Terre, ser. Inf.*, nr 27, Nancy, 279—290.
- Namysłowska-Wilczyńska B., 1993 — Zmienność złóż rud miedzi na monoklinie przedsudeckiej w świetle badań geostatystycznych. *Prace Naukowe Instytutu Geotechniki i Hydrotechniki Politechniki Wrocławskiej, s. Monografie*, nr 21.
- Nieć M., Mucha J., Kokesz Z., 1988 — Geological background for geostatistical models. *Science de la Terre, ser. Inf.*, nr 27, Nancy, 263—278.
- Piestrzyński A. i in., 1998 — Kobalt w złożu rud miedzi na monoklinie przedsudeckiej, SW Polska. *Polskie Towarzystwo Mineralogiczne — Prace Specjalne*, z. 10, 119—139.

ZBIGNIEW KOKESZ

**DIFICULTIES AND LIMITATIONS IN GEOSTATISTICAL MODELLING OF MINERAL DEPOSITS VARIABILITIES AND RESOURCES/RESERVES ESTIMATION BY KRIGING**

**Key words**

Mineral deposits, resources/ reserves estimation, geostatistics

**Abstract**

In the paper the basic limitations and difficulties in the geostatistical methods using for geological evaluation of deposits has been presented. The following factors, such as: number and spacing of data, measurement and data preparation errors, anisotropy and heterogeneity of a deposit, knowledge and experience gained in practical application of geostatistics have been discussed.

Conclusions deal with rules of deposits variabilities modeling and its usage in reserves estimation. It has been emphasized that the variability structure of the parameters considered in reserves calculation should be analysed more deeply and results of the studies should be also more widely interpreted. When anisotropy or heterogeneity are evident they should be taken into account in resources/reserves estimation. Before starting the study of a deposit variability structure it is advisable to carry out a detail statistical analysis of the available data. The analysis should also include construction of correlation diagrams. It is also indispensable to verify variogram models of the parameters which are taken into account in reserves estimation with cross-validation technique.