

ALFRED TRZASKA *, KRYSTYNA SOBOWSKA **

COLMATAGE, FLOWS WITH SUBSTANCE EXCHANGE OF ITS VOLUME

KOLMATACJA, PRZEPLYWY Z WYMIANĄ MASY I ZMIANĄ JEJ OBJĘTOŚCI

In this paper a certain model of the process of colmatage is discussed in which the swelling (multiplication) of particles in a porous medium proceeds. It is assumed that the process in question consists of two stages. During stage one, suspension which dispersed colmatant is forced into the porous medium; the colmatant settles in the medium pores. This stage has been described by a system of partial differential equations (1), (2) with initial-boundary conditions (4), (5). Following from the solution of this system, the function of the colmatant distribution in the medium at an arbitrary moment t , and at moment t_1 at which this stage is finished, is obtained. During the other stage, a liquid in which a substance dissolved or dispersed causing the swelling (multiplication) of the colmatant settled earlier, is forced into medium.

The volume concentration of the substance transported by the liquid and settled in the medium at stage two is found when a system of equations (10), (11) with initial-boundary conditions (12), (13) is solved. Next, the distribution of the above mentioned substance being determined, we find the function of position and swelling (multiplication) of the colmatant during stage two of the process. We use here equation (16) with the condition (17).

In this paper, the distribution of pressure during stage two of the process has been also determined. These computations have been carried out on the basis of the equation of motion (20) and on the assumption that — firstly — the flow proceeds at an assigned and at constant discharge of flow, and at constant difference of pressure at points $x = 0$ and $x = L$. In the latter case implicit function of the flow discharge (31) has been obtained.

Key words: flows with substance exchange and change of momentum, colmatage, filtration.

Tematem niniejszej publikacji jest opis przebiegu zjawiska kolmatacji, w którym dochodzi do zmiany objętości (pęcznienia, namnażania) kolmatanta osadzającego się w ośrodku porowatym. Takie pęcznienie czy też namnażanie się kolmatanta następuje w wyniku jego reakcji z pewną substancją, która również jest zatłaczana do przestrzeni porowej ośrodka.

* WYDZIAŁ GÓRNICZY, AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA, 30-059 KRAKÓW, AL. MICKIEWICZA 30

** INSTYTUT MATEMATYKI, AKADEMIA GÓRNICZO-HUTNICZA, 30-059 KRAKÓW, AL. MICKIEWICZA 30

Rozważany proces składa się z dwóch etapów. W trakcie pierwszego etapu zatłaczamy do osrodka porowatego zawieszinę ze zdyspergowanym kolmatantem, przy czym kolmatant ten ma potencjalną zdolność do zmiany objętości w wyniku pęcznienia (namnażania) po dokonaniu odpowiedniej obróbki. Jeżeli podczas takiego przepływu dochodzi do osadzania się cząstek kolmatanta w przestrzeni porowej, to po pewnym okresie przerywamy zatłaczanie tej zawiesziny i przechodzimy do drugiego etapu procesu. Zaczynamy zatłaczać ciecz, w której została rozpuszczona lub zdyspergowana substancja reagująca z wcześniej osadzonym kolmatantem i powodująca zmianę jego objętości. Naszym celem jest określenie rozkładu koncentracji objętościowej kolmatanta w porach osrodka w tym drugim etapie, wyznaczenie jego porowatości i wyliczenie rozkładu ciśnień w trakcie przepływu jako funkcji położenia i czasu.

Opis rozkładu kolmatanta niespęczniałego, dokonany dla etapu pierwszego, został określony na podstawie układu równań bilansu-transportu (1) i kinetyki (2), którą dobieramy w postaci najogólniejszej, zwanej też kinetyką trzecią. Pierwszy etap procesu kolmatacji przerywamy w pewnej chwili t_1 . Rozkład zatrzymanej masy kolmatanta niespęczniałego wyznacza funkcja dana wzorem (9). Jej graficzny przebieg ilustruje rys. 1.

Nowością rozpatrywanego zagadnienia w stosunku do wszystkich poprzednich opisów i identycznych rozkładów jest fakt, że kolmatująca masa nie została poddana spęcznieniu, a nośnik tej masy, ciecz, która ją transportuje nie ma własności powodujących pęcznienie. W efekcie zatrzymana masa posiada tę zdolność i jeżeli aktualnie doprowadzimy ją do spęcznienia lub namnożenia, to w wyniku zmiany objętości po odpowiednim czasie jej koncentracja objętościowa w pewnej chwili t i punkcie x przyjmie nową wartość. Znajomość tej wartości, a tym samym znajomość aktualnego rozkładu porowatości pozwala też na określenie rozkładu ciśnienia wynikającego z powyższych uwarunkowań.

Opis tego etapu procesu przedstawionego powyżej w skrócie opieramy na układzie równań różniczkowych cząstkowych. Pierwsze z nich to równanie bilansu-transportu przepływającej substancji powodującej pęcznienie (lub namnażanie) wcześniej osadzonego kolmatanta. Postać tego równania dana jest wzorem (10). Występują w nim dwie niewiadome funkcje. Pierwsza z nich, $C(x, t)$, określa stężenie pożywki uwarunkowującej namnażanie. Przykładem może być cukier jako pożywka dla zatrzymanych w osrodku drożdży. Druga niewiadoma funkcja $U(x, t)$ opisuje ilość wymienionej substancji pożywki, która przeszła z osrodka ciekłego do stałego, którym jest osadzony wcześniej kolmatant o stężeniu $P_0(x)$ (drożdże, grzyby, bakterie itp.). Sposób tej wymiany, jego mechanizm określa kinetyka procesu dana wzorem (11). Zgodnie z tą kinetyką szybkość wymiany jest wprost proporcjonalna do strumienia transportowanej substancji oraz objętości (ilości) zatrzymanego w poprzednim etapie procesu kolmatanta. Opierając się na układzie równań (10), (11), uzyskujemy potrzebną informację do rozwiązania równania kolejnej kinetyki (14) opisującej proces namnażania (pęcznienia) osadzonego poprzednio kolmatanta. Masa zatrzymanego w pierwszym etapie kolmatanta $P_0(x)$ jest w rozważanym opisie warunkiem początkowym, od którego poczynając, opisujemy drugi etap procesu.

Rozwiązanie równania (14) z warunkiem (16) daje odpowiedź odnośnie do rozkładu koncentracji objętościowej znajdującego się w przestrzeni porowej kolmatanta w dowolnej chwili t trwającego procesu. Jesteśmy zatem teraz w stanie wyznaczyć, opierając się na otrzymanym wzorze (19) i znanym związku między porowatością a wyłapaną masą, rozkład porowatości w osrodku porowatym. Rys. 2 jest graficzną ilustracją funkcji danej wzorem (19). Opierając się na uzyskanym rozkładzie porowatości oraz równaniu ruchu (20), wyznaczamy rozkład ciśnienia w przestrzeni i czasie trwającego zjawiska.

Rozkłady ciśnień opisaliśmy, zakładając, że przebieg zjawiska zachodzi przy znanym (np. stałym) wydatku przepływu (wzór (23)) oraz przy stałej, znanej różnicy ciśnień w punktach $x = 0$ i $x = L$ (wzór (32)). W tym drugim przypadku, ponieważ zachodziła taka potrzeba, wyznaczyliśmy również funkcję określającą prędkość filtracji $q_1(t)$ daną wzorem (31).

Słowa kluczowe: przepływy z wymianą masy i zmianą pędu, kolmatacja, filtracja.

1. Introduction

In this paper the description of the phenomenon of colmatage is presented, in which the change of the volume of colmatant (swelling, multiplication) setting in a porous medium proceeds. Such swelling or multiplication of the colmatant results from its reaction on a certain substance which is also forced into the porous medium.

The process under consideration consists of two stages. During stage one, suspension with dispersed colmatant is forced into the porous medium. The colmatant has potential ability to change its volume because of the swelling (multiplication) after certain processing actions. During such flow the colmatant particles settle in the porous medium (Litwiniszyn & Bodziony, 1961; Litwiniszyn, 1966). After some time we stop forcing this suspension, and stage two follows. A liquid is then forced in. In this liquid substance dissolved or dispersed enters into reaction with the colmatant introduced before causing the change of its volume. Our aim in stage two is to establish the distribution of the colmatant volume concentration in the medium pores, to determine its porosity and to compute the distribution of pressures during the flow as the function of position and time.

2. Determination of the distribution of colmatant during stage one of the process

Let us denote by $P(x, t)$ the volume concentration of colmatant in the medium pores at stage one of the process, and by $N(x, t)$ the concentration of solid particles in the suspension transported by this medium. The balance-transport equation is accepted in the form

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial [\varepsilon_0 - P(x, t)] N(x, t)}{\partial t} + q(t) \frac{\partial N(x, t)}{\partial x} = 0, \quad (1)$$

where ε_0 is initial porosity of the medium,

$q(t)$ — filtration velocity.

We assume that the process proceeds in compliance with the third kinetics (Trzaska, 1972). Thus, the equation of kinetics has the form

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} = \alpha(x) q(t) N(x, t) [A - P(x, t)] [P(x, t) + B], \quad (2)$$

where $0 \leq A \leq \varepsilon_0$, $B \geq 0$ are certain constant, and $\alpha(x)$ is a function describing colmatage properties of the medium.

We assume that suspension forced into the medium at point $x = 0$ has constant concentration n of solid particles. The process starts at the moment $t = 0$. Let us

notice that at the moment t of the process, the suspension front reaches point $x = \frac{1}{\varepsilon_0} Q(t)$, where

$$Q(t) = \int_0^t q(t) dt. \quad (3)$$

The system (1), (2) is solved with initial-boundary conditions

$$N(0, t) = n \quad (4)$$

$$P(x, t) = 0, \quad \text{when } x \geq \frac{1}{\varepsilon_0} Q(t). \quad (5)$$

Calculations made are given in the appendix. The solution has been obtained in the form

$$P(x, t) = \frac{AB [e^{S(x,t)} - 1]}{A + Be^{S(x,t)}}, \quad (6)$$

where $S(x, t)$ is expressed by the formula

$$S(x, t) = \frac{n(A+B)[Q(t) - \varepsilon_0 x] F(x)}{1 - nAB \int_0^x F(x) dx}. \quad (7)$$

Function $F(x)$ present in (7) has the form

$$F(x) = \alpha(x) e^{-AB \int_0^x \alpha(x) dx}. \quad (8)$$

At the moment t_1 when the forcing in of the suspension is over, the distribution of the concentration of the particles settled in the medium is denoted by the relation (9) given below.

$$P_0(x) = P(x, t_1) = AB \frac{\exp \frac{n(A+B)[Q(t_1) - \varepsilon_0 x] F(x)}{1 - nAB \int_0^x F(x) dx}}{A + B \exp \frac{n(A+B)[Q(t_1) - \varepsilon_0 x] F(x)}{1 - nAB \int_0^x F(x) dx}}. \quad (9)$$

Curve shown in Fig. 1 is an illustration of the above function describing the distribution of the colmatant at stage one after the moment t_1 of the process and is an output curve for stage two where the process is connected with the swelling (multiplication) of the colmatant substance settled until the moment t_1 .

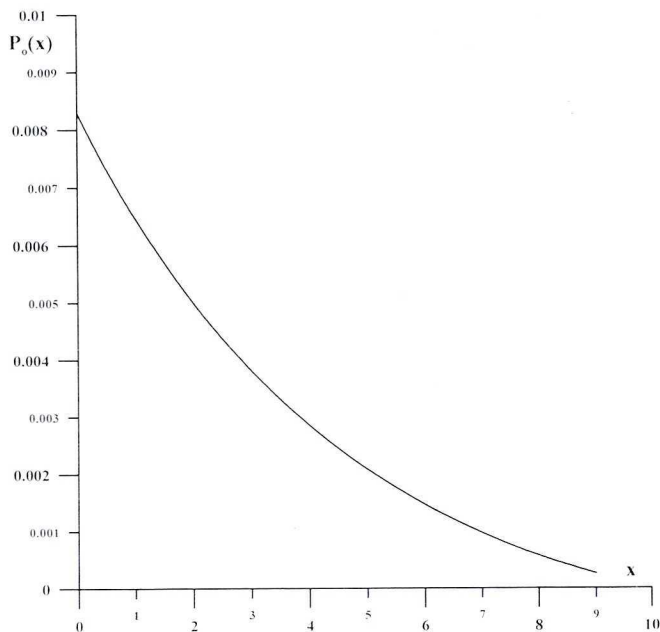


Fig. 1.

3. Description of the process of colmatage resulting from the change of the volume of the substance settled at stage one

Now stage two of the process will be described. Substance causing the swelling (multiplication) of the colmatant settled in the medium pores is forced into the medium. Let us denote by $C(x, t)$ the substance volume concentration in the liquid flowing through the medium. By $U(x, t)$ we determine a function describing the distribution of the substance exchanged between the liquid and solid media settled during stage one of the process. We assume that the substance concentration in the liquid forced into the medium at point $x = 0$ is constant equal to c_0 . Functions $C(x, t)$ and $U(x, t)$ are found by solving the system of balance-transport equations (10).

$$q_1(t) \frac{\partial C(x, t)}{\partial x} + \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = 0, \quad (10)$$

$(q_1(t))$ — the filtration velocity of the liquid transported at stage two of the process) and that of kinetics (11) which explains the way of the exchange given above.

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \alpha_1(x) q_1(t) C(x, t) P_0(x), \quad (11)$$

$(\alpha_1(x))$ — a certain function depended on the medium properties).

The system is considered for $t \geq t_1$, $x \geq 0$. With regard to assumptions discussed earlier, initial-boundary conditions are accepted in the form

$$C(0, t) = c_0 \quad \text{for } t \geq t_1, \quad (12)$$

$$U(x, t_1) = 0 \quad \text{for } x \geq 0. \quad (13)$$

Function $U(x, t)$ is eliminated from the system (10), (11). The following equation is obtained

$$\frac{\partial C(x, t)}{\partial x} = -\alpha_1(x) C(x, t) P_0(x).$$

Function (14) is its solution satisfying the boundary condition (12).

$$C(x, t) = c_0 e^{-\int_0^x \alpha_1(x) P_0(x) dx}. \quad (14)$$

Integrating equation (11) in which formula (14) and condition (13) are taken into account, we obtain function

$$U(x, t) = c_0 \alpha_1(x) P_0(x) Q_1(t) e^{-\int_0^x \alpha_1(x) P_0(x) dx}, \quad \text{for } t \geq t_1, \quad x \geq 0 \quad (15)$$

where $Q_1(t) = \int_{t_1}^t q_1(t) dt$.

Now, knowing function $U(x, t)$ of the distribution of the substance reacting on the colmatant in the porous medium, we can determine the distribution of the volume of the swelling (multiplying) colmatant $P^*(x, t)$ at the moment $t \geq t_1$ of the process. We have assumed that the velocity of the colmatage process proceeds according to the kinetics described by equation

$$\frac{\partial P^*(x, t)}{\partial t} = \alpha_2(x) P^*(x, t) U(x, t) [\varepsilon_0 - P^*(x, t)], \quad (16)$$

where $U(x, t)$ is expressed by the formula (15), and $\alpha_2(x)$ is a certain function dependent on the medium properties.

Relation (17)

$$P^*(x, t_1) = P_0(x), \quad (17)$$

where $P_0(x)$ is expressed by the formula (9) is an initial condition for equation (16). Taking formula (15) into consideration in equation (16) and after some transformations we write it in the form

$$\frac{\partial \ln \frac{P^*(x, t)}{\varepsilon_0 - P^*(x, t)}}{\partial t} = \varepsilon_0 c_0 \alpha_1(x) \alpha_2(x) P_0(x) Q_1(t) e^{-\int_0^x \alpha_1(x) P_0(x) dx}. \quad (18)$$

Let us denote by

$$W(x) = \varepsilon_0 c_0 \alpha_1(x) \alpha_2(x) P_0(x) e^{-\int_0^x \alpha_1(x) P_0(x) dx}.$$

Equation (18) can be written now as follows:

$$\frac{\partial \ln \frac{P^*(x, t)}{\varepsilon_0 - P^*(x, t)}}{\partial t} = W(x) Q(t).$$

Its solution with the initial condition (17) is function

$$P^*(x, t) = \frac{\varepsilon_0 P_0(x)}{P_0(x) + [\varepsilon_0 - P_0(x)] e^{-W(x) \int_{t_1}^t Q_1(t) dt}} \quad \text{for } x \geq 0, \quad t \geq t_1 \quad (19)$$

we look for.

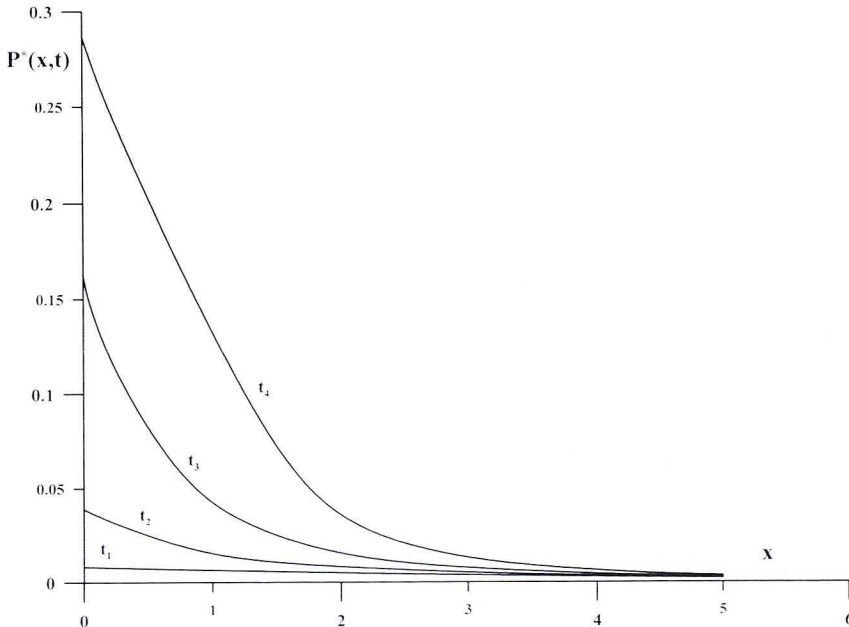


Fig. 2.

Curves shown in Fig. 2 illustrate the phenomena of colmatage connected with the swelling (multiplication) of the colmatant settled at stage one.

4. Determination of the distribution of pressure in the porous medium during stage two of the process

The distribution of pressure in the medium can be determined using the equation of motion (Trzaska 1986, 1989)

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = - \frac{aq(t)}{[\varepsilon(x, t)]^3}, \quad (20)$$

where a — a certain constant, $\varepsilon(x, t)$ is a function of the medium porosity.

Let us notice that $\varepsilon(x, t) = \varepsilon_0 - P^*(x, t)$.

Using this dependence in (20) we obtain an equation in the form

$$\frac{\partial h(x, t)}{\partial x} = - \frac{aq_1(t)}{\varepsilon_0^3} \left[1 + \frac{P_0(x)}{\varepsilon_0 - P_0(x)} e^{W(x) \int_{t_1}^t Q_1(t) dt} \right]^3. \quad (21)$$

The above equation is integrated assuming that — case I — the flow proceeds at the assigned and constant filtration velocity ($q_1(t) = q_1 = \text{const}$) and at self-regulating pressure at point $x = 0$ but constant at point $x = L$. Case II refers to the flow proceeding at the constant difference of pressures at points $x = 0$ and $x = L$; ($h(0) - h_L = \text{const}$) and at the varying flow velocity $q_1(t)$.

Case I

In compliance with what has been said above

$$h(L, t) = h_L, \quad (22)$$

L being the total length of the medium.

Solution of the equation (21) with the condition (22) for the assigned value $q_1(t)$ takes the form (23), and when $q_1(t) = q_1 = \text{const}$ it has the form (23')

$$h(x, t) = h_L + \int_x^L \frac{aq_1(t)}{\varepsilon_0^3} \left[1 + \frac{P_0(x)}{\varepsilon_0 - P_0(x)} e^{W(x) \int_{t_1}^t Q_1(t) dt} \right]^3 dx \quad (23)$$

$$h(x, t) = h_L + \frac{aq_1}{\varepsilon_0^3} \int_x^L \left[1 + \frac{P_0(x)}{\varepsilon_0 - P_0(x)} e^{\frac{1}{2} W(x) q_1 (t - t_1)^2} \right]^3 dx. \quad (23')$$

Case II

Let us consider now the flow for which we do not know the above mentioned filtration velocity $q_1(t)$. We know, however, the constant difference of pressures $h_0 - h_L$ at which the flow proceeds. Thus, $h(0, t) = h_0$ takes place. We have

$$h_0 - h_L = \int_0^L \frac{aq_1(t)}{\varepsilon_0^3} \left[1 + \frac{P_0(x)}{\varepsilon_0 - P_0(x)} e^{W(x) \int_{t_1}^t Q_1(t) dt} \right]^3 dx. \quad (24)$$

Hence, after transformations

$$\frac{\varepsilon_0^3(h_0 - h_L)}{a} = q_1(t) \int_0^L \left[1 + \frac{3P_0(x)}{\varepsilon_0 - P_0(x)} e^{W(x) \int_{t_1}^t Q_1(t) dt} + \frac{3[P_0(x)]^2}{[\varepsilon_0 - P_0(x)]^2} e^{2W(x) \int_{t_1}^t Q_1(t) dt} + \frac{[P_0(x)]^3}{[\varepsilon_0 - P_0(x)]^3} e^{3W(x) \int_{t_1}^t Q_1(t) dt} \right] dx.$$

Let us apply linearisation: $e^x \approx 1 + x$ on the right side of the formula. We have

$$\frac{\varepsilon_0^3(h_0 - h_L)}{a} = q_1(t) \int_0^L \left\{ 1 + \frac{3P_0(x)}{\varepsilon_0 - P_0(x)} \left[1 + W(x) \int_{t_1}^t Q_1(t) dt \right] + \frac{3[P_0(x)]^2}{[\varepsilon_0 - P_0(x)]^2} \left[1 + 2W(x) \int_{t_1}^t Q_1(t) dt \right] + \frac{[P_0(x)]^3}{[\varepsilon_0 - P_0(x)]^3} \left[1 + 3W(x) \int_{t_1}^t Q_1(t) dt \right] \right\} dx.$$

After transformations we obtain

$$\frac{\varepsilon_0^3(h_0 - h_L)}{a} = q_1(t) \left\{ \int_0^L \left[\frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 - P_0(x)} \right]^3 dx + \int_{t_1}^t Q_1(t) dt \int_0^L \frac{3W(x)P_0(x)\varepsilon_0^2}{[\varepsilon_0 - P_0(x)]^3} dx \right\}.$$

Let us introduce denotation

$$c \stackrel{\text{df}}{=} \frac{a}{h_0 - h_L} \int_0^L \frac{dx}{[\varepsilon_0 - P_0(x)]^3}; \quad d \stackrel{\text{df}}{=} \frac{a}{\varepsilon_0(h_0 - h_L)} \int_0^L \frac{3W(x)P_0(x)}{[\varepsilon_0 - P_0(x)]^3} dx.$$

We obtain the relation in the form

$$q_1(t) \left[c + d \int_{t_1}^t Q_1(t) dt \right] = 1. \quad (25)$$

Let us denote

$$y(t) \stackrel{\text{df}}{=} \int_{t_1}^t Q_1(t) dt. \quad (26)$$

Then $q_1(t) = y''(t)$.

Let us notice that

$$y(t_1) = 0 \quad (27)$$

$$y'(t_1) = Q_1(t_1) = 0. \quad (28)$$

Let us write the dependence (25) in the form

$$y''(t)[c + y(t)d] = 1. \quad (29)$$

We have obtained a differential equation which will be solved with the initial conditions (27), (28). We substitute $y'(t) = z(y)$. Hence $y''(t) = z'(y)y'(t) = z'(y)z(y)$. Equation (29) takes the form $z'z(c + dy) = 1$. That is

$$z \frac{dz}{dy} = \frac{1}{c + yd}.$$

Hence on the strength of the condition (28)

$$\frac{1}{2}z^2 = \frac{1}{d}[\ln(c + yd) - \ln c]$$

thus

$$(y')^2 = \frac{2}{d}[\ln(c + yd) - \ln c]$$

and

$$y' = \sqrt{\frac{2}{d}[\ln(c + yd) - \ln c]}.$$

We solve above equation with the condition (27). We have

$$\int_0^y \frac{dy}{\sqrt{\frac{2}{d}[\ln(c + dy) - \ln c]}} = t - t_1. \quad (30)$$

The relation (30) determining the dependence between t and y can be treated as an implicit equation of function

$$y = y(t) = \int_{t_1}^t Q_1(t) dt.$$

After determining the value of this function we can calculate the value of function $q_1(t)$ from the formula (24). We have

$$q_1(t) = \frac{(h_0 - h_L) \varepsilon_0^3}{a \int_0^L \left[1 + \frac{P_0(x)}{\varepsilon_0 - P_0(x)} e^{W(x)y(t)} \right]^3 dx}. \quad (31)$$

The looked for distribution of pressure in the medium is determined using formula (31)

$$h(x, t) = h_0 - (h_0 - h_L) \frac{\int_0^x \left[1 + \frac{P_0(x)}{\varepsilon_0 - P_0(x)} e^{W(x)y(t)} \right]^3 dx}{\int_0^L \left[1 + \frac{P_0(x)}{\varepsilon_0 - P_0(x)} e^{W(x)y(t)} \right]^3 dx} \quad (32)$$

in the relation (23).

APPENDIX

Solutions of the system of equations (1), (2) with the initial-boundary conditions (4), (5) is given below.

From equation (2) we calculate

$$N(x, t) = \frac{1}{\alpha(x)q(t)(A+B)} \frac{\partial \ln \frac{P(x, t) + B}{A - P(x, t)}}{\partial t}. \quad (33)$$

An auxiliary function

$$S(x, t) = \ln \frac{P(x, t) + B}{A - P(x, t)} - \ln \frac{B}{A} \quad (34)$$

is introduced.

So, the equation (33) takes the form:

$$N(x, t) = \frac{1}{\alpha(x)q(t)(A+B)} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t}. \quad (35)$$

Let us notice that on the strength of (34) the following occurs:

$$P(x, t) = \frac{AB[e^{S(x, t)} - 1]}{A + Be^{S(x, t)}}. \quad (36)$$

Introducing formula (35) into (1) we obtain

$$\frac{\partial P(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial [\varepsilon_0 - P(x, t)] N(x, t)}{\partial t} + \frac{1}{(A+B)\alpha(x)} \frac{\partial^2 S(x, t)}{\partial t \partial x} - \frac{\alpha'(x)}{(A+B)\alpha^2(x)} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} = 0.$$

We integrate it with respect to t taking into account the condition (5). Once again we take the dependence (35) into consideration and we obtain the relation

$$\frac{[\varepsilon_0 - P(x, t)]}{q(t)} \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} - \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} S(x, t) + \alpha(x)(A+B)P(x, t) = 0. \quad (37)$$

Introducing linearisation in the formula (37), we obtain an approximate formula

$$P(x, t) \approx \frac{ABS(x, t)}{A + B}.$$

We use the above dependence in (37). We have

$$\frac{1}{q(t)} \left[\varepsilon_0 - \frac{AB}{A+B} S(x, t) \right] \frac{\partial S(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial S(x, t)}{\partial x} + \left[AB\alpha(x) - \frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} \right] S(x, t) = 0. \quad (38)$$

A boundary condition for (38) is found using the dependence (35) taken at point $x = 0$. On the strength of (4) we have:

$$\frac{\partial S(0, t)}{\partial t} = n_0 \alpha(0) q(t) (A + B).$$

Hence, taking formulae (3), (5), (34) into account we obtain:

$$S(0, t) = n\alpha(0) Q(t) (A + B). \quad (39)$$

We solve equation (38) with the boundary condition (39). We apply the method of Cauchy characteristic. We examine the system of equations:

$$\frac{q(t) dt}{\left(\varepsilon_0 - \frac{AB}{A+B} S \right)} = dx = \frac{ds}{\left(\frac{\alpha'(x)}{\alpha(x)} - \alpha(x) AB \right) S}.$$

We obtain the characteristic equation

$$C_1 = \frac{S}{F(x)}, \quad \text{where} \quad F(x) = \alpha(x) e^{-AB \int_0^x \alpha(x) dx} \quad (40)$$

$$C_2 = Q(t) - \varepsilon_0 x + \frac{ABS \int_0^x F(x) dx}{(A+B) F(x)}.$$

With regard to the condition (39) the following dependence

$$C_1 = n(A+B) C_2$$

occurs.

We introduce formulae (40) into the above equality and we obtain:

$$\frac{S}{F(x)} = n(A+B) \left[Q(t) - \varepsilon_0 x + \frac{ABS \int_0^x F(x) dx}{(A+B) F(x)} \right].$$

Hence we obtain the following formula

$$S(x, t) = \frac{n(A+B) [Q(t) - \varepsilon_0 x] F(x)}{1 - nAB \int_0^x F(x) dx}. \quad (41)$$

Thus, the function of the colmatant distribution in the porous medium $P(x, t)$ is expressed by the formula (36) in which (41) has been introduced in the place of $S(x, t)$.

This research has been completed within the subject matter KBN 9 T 12A 010 16.

REFERENCES

- Litwiniszyn J., Bodziony J., 1961. Matematyczny model zjawiska kolmatacji n -frakcyjnej zawiesiny cząstek stałych w ośrodku ciągłym. Sprawozdanie PAN Kraków.
- Litwiniszyn J., 1966. The Phenomenon of Colmatage. *Archiwum Mechaniki Stosowanej* 4, 18 Kraków.
- Trzaska A., 1972. New Kinetics Equations of the Colmatage Process and their Application. *Archiwum Górnictwa*, 17, 4, 361–384.
- Trzaska A., 1986. The Distribution of Pressure During the Flow with Colmatage Through Heterogeneous Porous Media. *Archiwum Górnictwa*, 31, 1.
- Trzaska A., 1989. On Researches of the Colmatage. *Archiwum Górnictwa*, 34, 3, 529–541.

REVIEW BY: PROF. DR HAB. INŻ. JAKUB SIEMEK, KRAKÓW

Received: 11 April 2000.