

ZBIGNIEW KOKESZ\*

## Kriging i jego efektywność w obliczaniu zasobów złóż

Słowa kluczowe

Obliczanie zasobów złóż, geostatystyka

Streszczenie

W artykule scharakteryzowano efektywność stosowania metody krigingu w obliczaniu zasobów złóż w warunkach liniowych modeli semiwariogramów parametrów złożowych. Analizy skuteczności tej metody dokonano na podstawie badań modelowych i wyników praktycznych jej zastosowań. Wykazano, że znajomość semiwariogramów umożliwia prognozowanie efektywności stosowania procedury krigingu, a tym samym pozwala na wybór metody obliczania zasobów. Zrealizowane badania pozwoliły na określenie zakresu jej skutecznego stosowania. Zagadnienie to ma istotne znaczenie dla ustalenia zasad stosowania metody krigingu przy dokumentowaniu złóż.

### Wprowadzenie

Kriging jest geostatystyczną procedurą, która umożliwia prognozowanie wartości parametrów złoża w dowolnym jego punkcie (tzw. kriging punktowy) lub fragmencie (tzw. kriging blokowy) z możliwie najmniejszym błędem. Zasadniczą zaletą tej metody jest możliwość obliczania w każdym przypadku dokładności, z jaką dokonuje się oceny parametru. Omówienie tej metody znaleźć można w wielu publikacjach z zakresu geostatystyki (między innymi w pracach Journel, Huijbregts 1978; Kokesz, Nieć 1972; Namysłowska-Wilczyńska 1993; Mucha 1994; Armstrong 1998).

Na możliwość i celowość stosowania metody krigingu do interpretacji wyników rozpoznania złóż zwracano już wcześniej wielokrotnie uwagę (np. Kokesz 1988, 1994; Mikrut 1986;

---

\* Dr inż., Katedra Geologii Kopalnianej AGH, Kraków.

Mucha 1979, 1985; Mucha, Kokesz, Dolik 1994; Namysłowska-Wilczyńska 1988, 1993; Nieć 1988). Wyraz temu dają „Zasady dokumentowania złóż kopalni stałych” (2002), w których zaleca się jej stosowanie w szacowaniu zasobów. Zwraca się również uwagę na możliwość wykorzystania tej procedury w prognozowaniu cech jakościowych kopaliny, interpretacji przebiegu granic złoża (np. Dzedzej, Mikrut 1986; Kokesz 1992; Mucha 1979; Nieć Kokesz, Dolik 1989).

Istotną cechą geostatystycznej procedury jest uwzględnienie przy ocenie parametrów złożowych struktury ich zmienności wyrażonej za pomocą semiwariogramów. W metodzie tej rozpatruje się zatem nie tylko rozmieszczenie punktów rozpoznawczych względem analizowanego fragmentu złoża, ale również jego kształt, a co najważniejsze — strukturę zmienności złoża. Dzięki temu cechuje się ona w porównaniu z innymi metodami wyższą efektywnością. Spośród czynników warunkujących skuteczne stosowanie tej metody decydujące znaczenie ma charakter zmienności parametrów złoża.

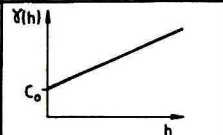
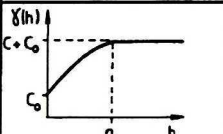
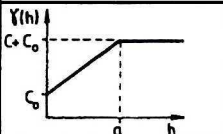
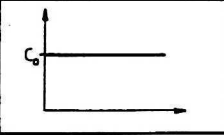
W artykule rozpatrzono wpływ struktury zmienności parametrów złożowych na efektywność stosowania metody krigingu w warunkach liniowych modeli semiwariogramów parametrów. Analizy skuteczności tej metody w obliczaniu zasobów dokonano na podstawie badań modelowych i wyników praktycznych jej zastosowań. Praca ta stanowi kontynuację badań prowadzonych na ten temat (Kokesz 2000). Poruszane zagadnienie ma istotne znaczenie dla ustalenia zasad stosowania metody krigingu przy dokumentowaniu złóż. Zrealizowane badania pozwoliły uściślić zakres stosowania tej metody w warunkach struktury zmienności opisanej liniowymi modelami semiwariogramów parametrów złoża.

## 1. Charakterystyka metody krigingu i jej efektywności

W metodzie krigingu estymatorem wartości średniej parametru jest średnia ważona. Współczynniki wagowe przypisywane poszczególnym obserwacjom wyznacza się z układu równań (warunkujących minimalizację błędu oceny parametru), na podstawie informacji o charakterze zmienności parametru złożowego.

Podstawowe źródło informacji o charakterze zmienności parametrów złożowych stanowią semiwariogramy. Przedstawiają one zróżnicowanie wartości parametrów w zależności od odległości między punktami pomiaru, a zatem strukturę ich zmienności, i w sposób pośredni charakteryzują autokorelację między obserwacjami. Semiwariogramy mogą mieć postać modeli z asymptotą, a więc funkcji z ograniczonym wzrostem, bez asymptoty i losowych (rys. 1). Spośród modeli liniowych wyróżnić można modele z teoretycznie nieograniczonym wzrostem, tzw. liniowe, oraz modele liniowe-Matherona charakteryzujące się asymptotą.

Różne mogą być sposoby wykorzystania metody krigingu w obliczaniu zasobów złóż (Kokesz 1988). Najczęściej obliczanie zasobów tą metodą sprowadza się do szacowania średnich wartości parametrów złożowych (na ogół średniej zasobności jednostkowej) w poszczególnych, wydzielonych blokach złoża. Ocenę globalną w obszarze całego złoża przeprowadza się sumując wyniki poszczególnych ocen. Obliczenie zasobów metodą krigingu obejmuje wówczas cztery zasadnicze etapy:

Model	Wykres semiwariogr.	Równanie
Liniowy		$\gamma(h) = C_0 + b \cdot h$
Sferyczny		$\gamma(h) = C \left[ \frac{3}{2} \cdot \frac{h}{a} - \frac{h^3}{2a^3} \right] + C_0$ dla $h \leq a$ $\gamma(h) = C_0 + C = \sigma^2$ dla $h > a$
Liniowy Matherona		$\gamma(h) = C_0 + \frac{C}{a} \cdot h$ dla $h \leq a$ $\gamma(h) = C_0 + C = \sigma^2$ dla $h > a$
Losowy		$\gamma(h) = C_0 = \sigma^2$

Rys. 1. Typowe modele semiwariogramów parametrów złożowych

$C_0$  — wartość wyrażająca zmienność lokalną parametru,  $C_0 + C$  — amplituda semiwariogramu równa wariancji teoretycznej ( $\sigma^2$ ),  $a$  — zasięg semiwariogramu (zasięg autokorelacji)

Fig. 1. Typical semivariogram models of mineral deposit parameters.  $C_0$  — value expressing local variability of the parameter,  $C_0 + C$  — semivariogram amplitude equal to theoretical variance ( $\sigma^2$ ),  $a$  — range of semivariogram (autocorrelation range)

- wyliczenie semiwariogramów podstawowych parametrów złoża na podstawie wyników pomiarów w punktach rozpoznawczych (otworach wiertniczych, punktach opróbowania i pomiaru miąższości) oraz ich aproksymację modelem teoretycznym,
- podział złoża na parcele (bloki) obliczeniowe zasobów,
- oszacowanie średnich wartości parametrów złoża i zasobów w pojedynczych parcelach (blokach) i ocenę dokładności ich oszacowania,
- ocenę globalnych zasobów złoża i dokładności ich oszacowania.

Efektywność stosowania metody kriginu w obliczaniu zasobów zależy w głównej mierze od charakteru zmienności parametrów złoża. Warunkiem koniecznym skutecznego stosowania tej metody jest nielosowy charakter zmienności parametrów, wyrażający się poprzez skorelowanie wyników ich obserwacji. W przypadku ich zmienności czysto losowej wyniki zastosowania kriginu w obliczaniu zasobów nie odbiegają od otrzymanych metodami średniej arytmetycznej (np. prostą metodą średniej arytmetycznej, metodą bloków geologicznych i eksploatacyjnych). Wagi kriginu nie różnią się wówczas od wag przypisywanych obserwacjom w tych metodach. A zatem, jeśli parametry złożowe (zawartość składnika użytecznego, miąższość złoża, zasobność) wykazują zmienność losową, do poprawnego obliczenia zasobów wystarczy zastosować którąś z metod średniej arytmetycznej. W tym przypadku bezcelowe jest także sporządzanie map izolinii parametrów złożowych (Dolík, Kokesz, Nieć 1988).

Jak wynika z przeprowadzonych badań (Kokesz 2000), znajomość semiwariogramów umożliwia prognozowanie efektywności stosowania metody krigingu, a tym samym pozwala na wybór metody obliczania zasobów. Ma to istotne znaczenie, przede wszystkim z uwagi na fakt, że poszczególne złoża charakteryzują się różną strukturą zmienności. Wyraża się to odmiennością modeli semiwariogramów parametrów złożowych bądź zróżnicowaniem wielkości parametrów opisujących te modele (Kokesz, Mucha 1987; Mucha, Kokesz 1986). Można zatem oczekiwać różnej efektywności stosowania metody krigingu przy dokumentowaniu złóż.

W dalszej części artykułu scharakteryzowano efektywność stosowania metody krigingu w warunkach liniowych modeli i przedstawiono możliwości jej prognozowania na podstawie znajomości semiwariogramów parametrów złożowych. Efektywność metody krigingu scharakteryzowano na tle wyników metody średniej arytmetycznej.

## 2. Analiza efektywności metody krigingu

### 2.1. Kriging w warunkach nieograniczonego zasięgu autokorelacji obserwacji

We wcześniejszych ocenach (np. Mucha, Kokesz 1986) za wskaźnik skuteczności stosowania metody krigingu z tytułu autokorelacji obserwacji przyjmowano wielkość parametru  $U_L$ , określającego udział zmienności lokalnej ( $C_0$ ) w obserwowanej zmienności parametru ( $\sigma^2$ ).

Efektywność krigingu rzeczywiście wzrasta wraz ze zmniejszaniem się zmienności lokalnej. Obserwuje się coraz to większe różnice w wynikach szacowania tą metodą i metodą średniej arytmetycznej. Jednak, jak wynika z analizy praktycznych zastosowań krigingu, wskaźnik ten nie jest wystarczający do pełnej oceny efektywności tej metody. Skuteczność jej warunkowana jest także przebiegiem semiwariogramu (Kokesz 1988). Wskazuje to na konieczność uwzględniania w prognozie pełniejszej informacji o strukturze zmienności parametrów złoża.

Niedogodnością przyjmowanego do oceny efektywności metody krigingu wskaźnika  $U_L$  było odnoszenie wielkości  $C_0$  do obserwowanej całkowitej zmienności parametru, wyrażonej poprzez jego wariancję  $\sigma^2$ . Ma to uzasadnienie jedynie w przypadku modeli z asymptotą, a więc modeli reprezentujących semiwariogramy wzrastające tylko w pewnym zakresie odległości, poza którym przyjmują stałą wartość równą wariancji statystycznej, czyli generalnie w warunkach ograniczonego zasięgu autokorelacji obserwacji. Często jednak zmienność parametru opisuje model liniowy z nieograniczonym teoretycznie wzrostem semiwariogramu. Poza tym nawet w przypadku modeli z asymptotą przy małych odległościach, odpowiadających rozmiarom obszarów najczęściej uwzględnianych przy ocenie zasobów, można przyjąć liniowy model zautokorelowania obserwacji (Kokesz 1988).

Z praktycznych zastosowań tej procedury wynikało, że na wielkość współczynników wagowych krigingu ma wpływ nie tylko zmienność lokalna parametru, ujawniająca się na semiwariogramie wielkością  $C_0$ , lecz także nachylenie wykresu semiwariogramu, świadczące o intensywności zmienności parametru (Kokesz 1988). Wraz ze zwiększaniem się nachylenia wykresu funkcji  $\gamma(h)$  obserwuje się coraz to większe różnice w wartościach współczynników wagowych przypisywanych poszczególnym obserwacjom. Prowadzi to do coraz to większych



różnic w ocenie parametru dokonywanej krigingiem i metodami opartymi na średniej arytmetycznej. Wzrasta tym samym efektywność obliczeń metodą geostatystyczną. W tej sytuacji zaproponowano (Kokesz 2000) przyjęcie za wskaźnik efektywności metody krigingu wielkości:

$$K = \frac{C_0}{b} \quad (1)$$

gdzie:

$C_0$  — zmienność lokalna parametru (wyraz wolny w równaniu modelu semiwariogramu),

$b$  — współczynnik nachylenia liniowego modelu semiwariogramu  $\gamma(h)$  przy odległości  $h$  wyrażonej w metrach.

Wyniki przeprowadzonych obliczeń (Kokesz 2000) w pełni potwierdziły miarodajność wskaźnika  $K$  w zakresie prognozowania efektywności stosowania metody krigingu. Dowiodły one, że w przypadku stosowania tej metody wzrost dokładności szacowania w stosunku do uzyskiwanej metodą średniej arytmetycznej nie zależy od konkretnych wartości  $C_0$  i  $b$  liniowych modeli semiwariogramów, lecz od wzajemnego stosunku tych wielkości. Przy tych samych wartościach wskaźnika  $K$  obserwuje się identyczną poprawę dokładności oceny parametrów złożowych, a zatem również i zasobów w pojedynczych blokach obliczeniowych.

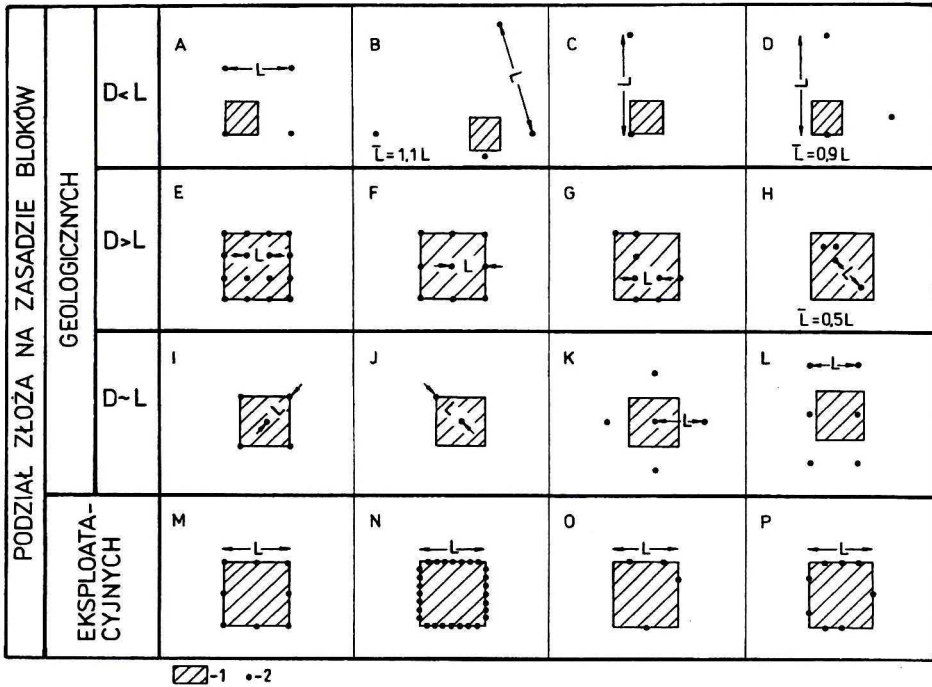
W niniejszej pracy, w celu scharakteryzowania efektywności metody krigingu, rozpatrzono na przykładzie różnych sytuacji szacowania wpływ wielkości  $C_0$  i  $b$  na skuteczność obliczeń realizowanych tą procedurą. Badania te przeprowadzono na przykładzie sytuacji szacowania przedstawionych na rysunku 2. Rozpatrywane przykłady odzwierciedlają różne możliwe sytuacje podziału złoża na bloki, tj. podział złoża na zasadzie bloków geologicznych o różnych rozmiarach względem rozstawu sieci rozpoznawczej oraz podział złoża na zasadzie bloków eksploatacyjnych. We wszystkich tych przypadkach przedmiotem oceny jest typowy blok złoża w formie kwadratu. Uwzględniono przy tym różne sposoby rozmieszczenia obserwacji (regularny, pseudoregularny, nieregularny). Przyjmując dla poszczególnych sytuacji rozpoznania złoża różne wartości  $C_0$  i  $b$  liniowego modelu semiwariogramu, określono wielkości błędów oszacowania średniej wartości parametru w bloku metodami krigingu i średniej arytmetycznej. Wielkości  $C_0$  i  $b$  przyjęto z zakresu wartości obserwowanych dla parametrów złożowych.

Znajomość semiwariogramu pozwalała na prognozę wielkości tych błędów. Zminimalizowany — przy zastosowaniu wyznaczonych z układu równań krigingu współczynników wagowych — błąd oceny średniej wartości parametru (zwany błędem krigingu) wynosi (Journel, Huijbregts 1978):

$$\sigma_k = \sqrt{\sum_{i=1}^n w_i \cdot \bar{\gamma}(S_i, V) + \mu - \bar{\gamma}(V, V)} \quad (2)$$

gdzie:

$w_i$  — współczynnik wagowy krigingu przypisany pojedynczej obserwacji,



Rys. 2. Rozpatrywane sytuacje szacowania zasobów

A—P — symbole poszczególnych sytuacji szacowania, 1 — oceniany blok, 2 — punkty rozpoznania złoża (obserwacje uwzględnione w ocenie bloku), L — rozstaw wyrobisk rozpoznawczych,  $\bar{L}$  — średnia odległość między sąsiednimi obserwacjami

Fig. 2. Considered cases of reserves estimation

A—P — symbols of analyzed cases of estimation, 1 — estimated block, 2 — points of deposit exploration (observation points considered in the block estimation), L — distance between mining workings (boreholes),  $\bar{L}$  — average distance between neighbouring observations

$\bar{\gamma}(S_i, V)$  — średnia wartość semiwariogramu dla wszystkich możliwych odcinków łączących punkt rozpoznania złoża  $S_i$  z ocenianym blokiem V,

$\bar{\gamma}(V, V)$  — średnia wartość semiwariogramu dla wszystkich możliwych odcinków zawartych w granicach ocenianego bloku,

$\mu$  — mnożnik Lagrange'a.

Błąd, jaki popełniamy przyjmując, że średnia wartość parametru złoża w ocenianej jego części jest równa średniej arytmetycznej wartości tego parametru określonej na podstawie obserwacji, nosi w geostatystyce nazwę błędu ekstensji. Jego wielkość wynosi (Journel, Huijbregts 1978):

$$\sigma_E = \sqrt{\frac{2}{n} \sum_{i=1}^n \bar{\gamma}(S_i, V) - \bar{\gamma}(V, V) - \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \gamma(S_i, S_j)} \quad (3)$$

gdzie:

$\gamma(S_i, S_j)$  — wartość semiwariogramu dla odległości między punktem rozpoznawczym  $S_i$  i  $S_j$ , pozostałe symbole jak we wzorze (2).

Obliczenia przeprowadzono przy różnej gęstości sieci rozpoznawczej. Założono, że rozstaw wyrobisk  $L$  wynosi odpowiednio: 100, 500, 1000 metrów. Za miarę efektywności krigingu przyjęto względny procentowy wzrost dokładności oceny z tytułu zastosowania tej metody  $\varepsilon$ , określony ze wzoru:

$$\varepsilon = \frac{\sigma_E - \sigma_k}{\sigma_E} \cdot 100\% \quad (4)$$

Z uwagi na bogaty materiał obliczeniowy, wyniki ujęto w formie syntetycznej w postaci wykresów przedstawiających zależność wielkości przyrostu dokładności od wartości  $C_0/b$  (rys. 3).

Z analizy wykresów (rys. 3) wynika, że skuteczność stosowania metody krigingu maleje wraz ze zwiększaniem się wartości  $C_0/b$ . Istnieją zatem realne granice opłacalności stosowania tej metody z tytułu autokorelacji obserwacji. Można zatem określić dla poszczególnych analizowanych sytuacji rozpoznania graniczne wartości wskaźnika  $K$ , przy których stosowanie krigingu jest jeszcze praktycznie uzasadnione. Wymaga to przyjęcia w sposób arbitralny założenia odnośnie do celowości stosowania tej metody.

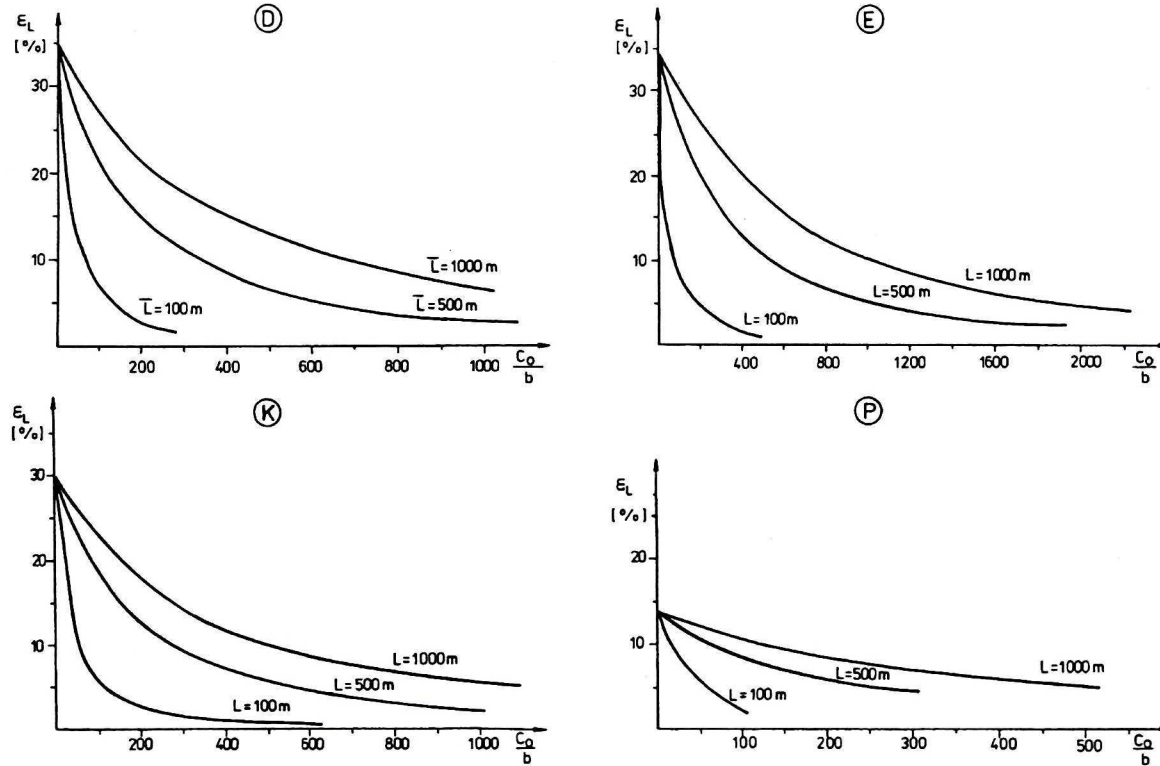
Analizy dopuszczalnych wartości wskaźnika  $K$  dokonano w dwóch wariantach, przyjmując za próg opłacalności stosowania tej metody 5- i 10-procentowy wzrost dokładności oceny w stosunku do uzyskiwanej metodą średniej arytmetycznej. Ustalone z wykresów (rys. 3) wartości krytyczne  $C_0/b$  zestawiono w tabeli 1.

Zwraca uwagę fakt występowania istotnych różnic w kryterialnych wartościach wskaźnika  $K$  ustalonych przy różnych odległościach między wyrobiskami. Wraz ze zwiększaniem się odległości między punktami rozpoznania złoża wzrastają krytyczne wartości tego wskaźnika. Największe jego wartości uzyskano w przypadku rzadkiej sieci rozpoznawczej, tj. przy rozstawie wyrobisk  $L$  równym 1000 m. Dowodzi to, że przy rzadkiej sieci rozpoznawczej efektywne stosowanie metody krigingu możliwe jest nawet przy mało zaznaczonej zmienności nielosowej parametru.

Poczynione spostrzeżenia dowodzą konieczności ujęcia w ocenie efektywności stosowania metody krigingu rozstawu punktów rozpoznawczych. Uwzględnienie gęstości sieci rozpoznawczej możliwe jest poprzez odnoszenie wielkości wskaźnika  $K$  do rozstawu wyrobisk rozpoznawczych  $L$ . Wskazują na to dane zestawione w tabeli 1. Wyliczone dla poszczególnych rozpatrywanych sytuacji szacowania wielkości  $K : L$  mają zbliżoną wartość.

Obserwuje się jednak różnice w kryterialnych wartościach  $K : L$  ustalonych dla poszczególnych sytuacji szacowania, co świadczy, że efektywność metody krigingu warunkowana jest także geometrią sytuacji szacowania i zależy między innymi od kształtu ocenianego bloku, jego wielkości, rozmieszczenia obserwacji.

Porównanie wyników szacowania krigingiem i metodą średniej arytmetycznej prowadzi do wniosku, że stosowanie metody krigingu jest szczególnie efektywne do oceny złoża w małych



Rys. 3. Efektywność stosowania metody krzygu w wybranych sytuacjach szacowania przy różnych parametrach liniowego modelu semiwariogramu D, E, K, P — rozpatrywane sytuacje szacowania,  $\epsilon_L$  — względny procentowy wzrost dokładności oceny z tytułu zastosowania metody krzygu, wyliczony ze wzoru (4),  $C_0, b$  — parametry liniowego modelu semiwariogramu  $\gamma(h)$  przy odległości  $h$  wyrażonej w metrach

Fig. 3. Effectiveness of kriging application in selected cases of reserves estimation for different parameters of linear model of semivariogram D, E, K, P — considered estimation cases,  $\epsilon_L$  — relative (in percentages) increase in the estimation accuracy due to the kriging application — calculated from formule (4),  $C_0, b$  — parameters of linear semivariogram model  $\gamma(h)$  when  $h$  is given in meters



TABELA 1

Maksymalne wartości wskaźnika K, przy których stosowanie kriginu w rozpatrywanych sytuacjach szacowania jest praktycznie celowe

TABLE 1

Maximum values of the index K when the kriging application for considered estimation cases is practically useful

Sytuacja szacowania	Reprezentowany przez daną sytuację sposób podziału złoża na bloki	Dopuszczalne wartości wskaźnika K przy odległości między wyrobiskami			Dopuszczalne wartości K : L przy odległości między wyrobiskami			Uśrednione wartości K : L			
		L = 100	L = 500	L = 1000	L = 100	L = 500	L = 1000				
		m									
A	Podział na zasadzie bloków geologicznych	D < L	170	700	ok.1500	1,70	1,40	1,50	1,32 (0,63)	1,26 (0,56)	1,15 (0,51)
B			(80)	(300)	(750)	(0,80)	(0,60)	(0,75)			
C			150	700	1600	1,50*	1,40*	1,60*			
D			(50)	(380)	(800)	(0,50)*	(0,76)*	(0,80)*			
E			100	500	950	1,00	1,00	0,95			
F			(50)	(220)	(420)	(0,50)	(0,44)	(0,42)			
G		D > L	180	980	1980	1,80	1,96	1,98	1,20 (0,49)		
H			(100)	(530)	(1050)	(1,00)	(1,06)	(1,05)			
I			100	500	870	1,00	1,00	0,87			
J			(40)	(230)	(450)	(0,40)	(0,46)	(0,45)			
K			110	420	940	1,10	0,84	0,94			
L			(25)	(120)	(240)	(0,25)	(0,24)	(0,24)			
M		D ~ L	100	500	950	1,00*	1,00*	0,95*	0,33 (0,42)		
N			(20)	(120)	(270)	(0,20)*	(0,24)*	(0,27)*			
O			60	250	590	0,60	0,50	0,59			
P			(20)	(100)	(200)	(0,20)	(0,20)	(0,20)			
Q	90		400	900	0,90	0,80	0,90				
R	(30)		(170)	(380)	(0,30)	(0,34)	(0,38)				
S	Podział na zasadzie bloków eksploatacyjnych	100	520	1050	1,00	1,04	1,05	0,33 (0,10)			
T		(50)	(260)	(500)	(0,50)	(0,52)	(0,50)				
U		130	650	1200	1,30	1,30	1,20				
V		(60)	(320)	(650)	(0,60)	(0,64)	(0,65)				
W		20	80	160	0,20	0,15	0,15				
X		(2)	(10)	(20)	(0,02)	(0,02)	(0,02)				
Y	0	0	0	0,00	0,00	0,00	0,33 (0,10)				
Z	(—)	(—)	(—)	(—)	(—)	(—)					
AA	70	350	650	0,70	0,70	0,65					
AB	(20)	(130)	(280)	(0,20)	(0,26)	(0,28)					
AC	L — rozstaw wyrobisk	50	240	480	0,50	0,48	0,48	0,33 (0,10)			
AD		(15)	(50)	(100)	(0,15)	(0,10)	(0,10)				

170 — wielkości ustalone przy przyjęciu za próg opłacalności stosowania kriginu co najmniej 5-procentowy wzrost dokładności oceny w stosunku do uzyskiwanej metodą średniej arytmetycznej, (80) — wielkości ustalone przy przyjęciu za próg opłacalności stosowania kriginu co najmniej 10-procentowy wzrost dokładności oceny w stosunku do uzyskiwanej metodą średniej arytmetycznej, \* — ze względu na nieregularne rozmieszczenie punktów rozpoznawczych wartości K odniesiono do średniej odległości między obserwacjami, D — rozmiar bloku (parceli obliczeniowej), L — rozstaw wyrobisk rozpoznawczych.

jego parcelach, mniejszych od rozstawu punktów rozpoznawczych, zwłaszcza gdy wyrobiska rozmieszczone są nieregularnie. Wskazują na to wyniki obliczeń uzyskane w przypadku sytuacji A, B, D (tab. 1), a potwierdzają rezultaty praktycznych zastosowań tej metody (Kokesz 1988; Kokesz, Mucha 1987).

Można również oczekiwać znacznej efektywności metody krigingu w przypadku podziału złoża na bloki, których rozmiary znacznie przekraczają rozstaw sieci rozpoznawczej. Świadczą o tym stosunkowo wysokie dopuszczalne wartości  $K : L$  uzyskane w sytuacji szacowania E.

Niskie krytyczne wartości wskaźnika  $K$  oraz wielkości  $K : L$  w przypadku sytuacji M, N, O, P (tab. 1) wskazują, że stosowanie metody krigingu do oceny złoża w blokach eksploatacyjnych, a więc na etapie rozpoznania wyrobiskami górniczymi, celowe jest jedynie przy silnie zaznaczonej nielosowej zmienności parametrów złożowych.

Z przedstawionych wyżej rozważań wynika, że w prognozie efektywności zastosowania metody krigingu, opartej na analizie semiwariogramów parametrów złoża, uzasadnione jest również uwzględnienie sposobu podziału złoża na bloki obliczeniowe zasobów.

Uzyskane wyniki jednoznacznie wskazują na możliwość opracowania wymagań jakie powinny spełniać liniowe modele semiwariogramów parametrów złoża, warunkujące celowość stosowania metody geostatystycznej w obliczaniu zasobów złóż. Propozycje takich wymagań ujęto w tabeli 2.

Wypada tu zwrócić uwagę, że w praktyce przy dokumentowaniu złóż często parcele obliczeniowe zasobów wyznaczone na zasadzie bloków geologicznych znacznie różnią się rozmiarami. Może to sprawiać trudności w wyborze właściwego wariantu podziału złoża na bloki

TABELA 2

Propozycje wymagań odnośnie do wielkości wskaźnika  $K$  warunkującego opłacalność stosowania metody krigingu (dotyczy liniowych modeli semiwariogramów parametrów złoża)

TABLE 2

Proposed requirements for the index  $K$  when the kriging application is profitable (for linear models of semivariograms of deposit parameters)

Sposób podziału złoża na bloki		Największe możliwe wartości $K : L$ *		
Podział na zasadzie bloków geologicznych	$D < L$	1,3 (0,6)	1,2 (0,5)	1,1 (0,5)
	$D > L$	1,2 (0,5)		
	$D \sim L$	0,9 (0,4)		
Podział na zasadzie bloków eksploatacyjnych		0,3 (0,1)		

$D$  — rozmiar bloku (parceli obliczeniowej),  $L$  — rozstaw wyrobisk rozpoznawczych, \* — przy przyjęciu za próg opłacalności stosowania metody krigingu co najmniej 5-procentowy wzrost dokładności oceny w stosunku do uzyskiwanej metodą średniej arytmetycznej (w nawiasach podano wartości  $K : L$  ustalone przy przyjęciu za próg opłacalności stosowania metody krigingu co najmniej 10-procentowy wzrost dokładności oceny), w przypadku nieregularnego rozmieszczenia punktów rozpoznawczych za  $L$  należy przyjmować średnią odległość między sąsiednimi obserwacjami.

( $D > L$ ,  $D < L$ ,  $D \sim L$ ). W takich sytuacjach należałoby korzystać z uśrednionych wielkości  $K : L$  ujętych w tabeli 2.

Jak wynika z analizy opracowanych wykresów (rys. 3), efektywność kriginu rośnie wraz ze zmniejszaniem się wielkości wskaźnika  $K$  do pewnej wartości, odpowiadającej sytuacji, kiedy stała  $C_0$  jest równa 0, a więc gdy zmienność lokalna parametru nie występuje. Istnieją zatem racjonalne granice efektywności, jaką można uzyskać w rezultacie rozpoznania złoża. W przypadku szacowania metodą kriginu średnich wartości parametrów złoża (zasobów) w pojedynczych blokach, wyznaczonych na zasadzie bloków geologicznych, można oczekiwać maksymalnie około 20—40% wzrostu dokładności oceny w stosunku do uzyskiwanej metodą średniej arytmetycznej. Przy szacowaniu zasobów w poszczególnych blokach eksploatacyjnych maksymalny możliwy wzrost dokładności oceny nie przekracza na ogół 15%.

Procedura kriginu pozwala również na usprawnienie obliczania zasobów w przypadku podziału złoża na zasadzie wieloboków Bołdyriewa. Wówczas do oceny średnich wartości parametrów złoża w pojedynczym wieloboku wykorzystuje się informacje z otworu centralnego i najbliższych położonych otworów. Oszacowana na tej zasadzie średnia wartość parametru złożowego w wieloboku lepiej charakteryzuje złożo niż przypisana wielobokowi pojedyncza obserwacja. Praktyczne sposoby takiego postępowania zostały szczegółowo przedstawione na przykładzie dokumentowania zasobów złóż siarki na potrzeby eksploatacji otworowej (Kokesz 1991). Jak wynika z przeprowadzonych obliczeń, kriging pozwala na szacowanie parametrów złoża oraz jego zasobów w pojedynczych blokach przypisanych obserwacjom przeciętnie z dwukrotnie wyższą dokładnością niż to ma miejsce w tradycyjnej metodzie wieloboków (Kokesz 2000).

## 2.2. Kriging w warunkach ograniczonego zasięgu autokorelacji obserwacji

Znajomość wielkości wskaźnika  $K$  umożliwia prognozowanie efektywności metody kriginu w przypadku, gdy zmienność parametru charakteryzuje liniowy, bez asymptoty model semiwariogramu. Jeśli semiwariogram ma postać modelu z asymptotą, w prognozie niezbędne jest uwzględnienie również zasięgu autokorelacji obserwacji. Promień autokorelacji wyznacza wówczas zasięg semiwariogramu, tj. odległość, przy której obserwuje się stabilizację wartości funkcji strukturalnej wokół wartości odpowiadającej wariancji statystycznej parametru (rys. 1).

Informacji na temat wpływu zasięgu autokorelacji obserwacji na wyniki szacowania metodą kriginu dostarczają przeprowadzone badania.

Na przykładzie tych samych sytuacji rozpoznania przedstawionych na rysunku 2 dokonano analizy efektywności stosowania tej metody, zakładając że zmienność parametru opisuje liniowy-Matherona model semiwariogramu. Dla każdej rozpatrywanej sytuacji dokonano oceny wielkości błędu ekstensji ( $\sigma_E$ ) i kriginu ( $\sigma_K$ ) przy różnych parametrach modelu semiwariogramu. Przyjmując stałe wartości  $C_0/b$ , różnicowano zasięg semiwariogramu ( $a$ ). Za miarę efektywności kriginu przyjęto stopień polepszenia dokładności oceny wartości średniej parametru z tytułu zastosowania metody kriginu ( $\epsilon_M$ ). Wielkość tę określono z ogólnej formuły (4).

W celu ustalenia wpływu zasięgu autokorelacji obserwacji ( $a$ ) na efektywność szacowania metodą kriginu, wyliczone wielkości  $\epsilon_M$  odniesiono do efektywności  $\epsilon_L$  uzyskiwanej przy



liniowym modelu semiwariogramu posiadającym identyczną wartość stosunku  $C_0/b$  co rozpatrywany model liniowy-Matherona (tab. 3). Wyniki obliczeń ujęto syntetycznie w formie wykresów zależności wielkości  $\varepsilon_M/\varepsilon_L$  od zasięgu autokorelacji obserwacji (rys. 4).

TABELA 3

Analiza wpływu zasięgu semiwariogramu na efektywność szacowania metodą krigingu (dotyczy modelu semiwariogramu liniowego-Matherona i sytuacji szacowania K)

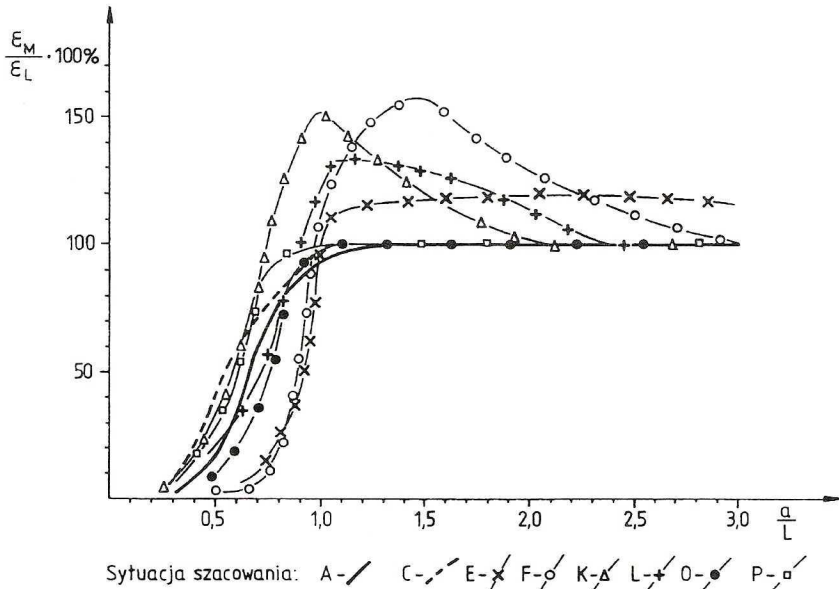
TABLE 3

Analysis of the influence of a semivariogram range on an effectiveness of the kriging application (for linear-Matheron's model of the semivariogram and the estimation case K)

Odległość między punktami rozpoznawczymi [m]	Charakterystyka modelu semiwariogramu						Maksymalny błąd oceny z prawdopodobieństwem 95,5%		Względny procentowy wzrost dokładności oceny z tytułu zastosowania metody krigingu		$\varepsilon_M/\varepsilon_L \times 100\%$
	$C_0$	$b (C/a)$	$C_0/b$	a	C	a/L	$2\sigma_E$	$2\sigma_K$	$\varepsilon_M$	$\varepsilon_L$	
L = 100	0	1	0	25	25	0,25	4,822	4,787	0,7	31,2	2,2
				50	50	0,5	7,496	6,723	10,3		33,0
				70	70	0,7	9,305	6,401	30,3		97,1
				100	100	1,0	10,509	5,591	46,8		149,9
				150	150	1,5	10,760	6,894	35,9		115,1
	10	0,2	50	25	5	0,25	3,557	3,554	0,08	10,5	0,6
				50	10	0,5	4,386	4,259	2,9		27,6
				100	20	1,0	5,284	4,401	16,7		158,8
				150	30	1,5	5,582	4,879	12,6		120,1
	L = 500	0	1	0	100	100	0,2	9,390	9,359	0,33	31,2
150					150	0,3	12,004	11,825	1,46	4,7	
250					250	0,5	16,762	15,034	10,05	32,2	
350					350	0,7	21,308	14,805	30,5	95,2	
500					500	1,0	23,098	12,242	47,0	150,6	
10		0,2	50	100	20	0,2	5,063	5,055	0,15	25,3	0,6
				150	30	0,3	6,068	6,015	0,88		3,5
				250	50	0,5	8,012	7,418	7,40		29,2
				500	100	1,0	10,482	6,551	37,5		148,2

$C_0$ , b, a, C — parametry modelu semiwariogramu, a — zasięg semiwariogramu  $\gamma(h)$  przy odległości h wyrażonej w metrach (zasięg autokorelacji obserwacji);  $\sigma_E$  — błąd ekstensji;  $\sigma_K$  — błąd krigingu;  $\varepsilon_M$  — polepszenie oceny w przypadku ograniczonego zasięgu autokorelacji obserwacji (w przypadku modelu liniowego-Matherona);  $\varepsilon_L$  — polepszenie oceny w przypadku teoretycznie nieograniczonego zasięgu autokorelacji obserwacji (w przypadku liniowego modelu semiwariogramu o tych samych parametrach  $C_0$  i b co model liniowy-Matherona)





Rys. 4. Efektywność stosowania metody krzygu przy różnych zasięgach autokorelacji obserwacji  $\varepsilon_M$  — wzrost dokładności oceny uzyskany przy modelu liniowym-Matherona,  $\varepsilon_L$  — wzrost dokładności oceny przy modelu liniowym bez asymptoty posiadającym identyczne parametry  $C_0$  i  $b$  co model liniowy-Matherona,  $a$  — zasięg autokorelacji (zasięg semiwariogramu),  $L$  — rozstaw wyrobisk rozpoznawczych

Fig. 4. Effectiveness of kriging application for different range of autocorrelation

$\varepsilon_M$  — increase of the estimation accuracy obtained for linear-Matheron's model (piecewise linear model),  $\varepsilon_L$  — increase of the estimation accuracy for linear model,  $a$  — range of autocorrelation (range of semivariogram),  $L$  — distance between mine working (boreholes)

Jak wynika z przeprowadzonych badań, wraz ze zwiększaniem się zasięgu autokorelacji wzrasta efektywność krzygu w stosunku do metody średniej arytmetycznej (tab. 3). Obserwuje się coraz to większe różnice w wielkościach błędów oszacowań średnich wartości parametrów złoża obiema metodami. W przypadku stosowania metody krzygu zaznacza się wzrost dokładności szacowania ( $\varepsilon_M$ ). Błędy krzygu mogą być nawet dwukrotnie niższe od błędów oszacowania metodą średniej arytmetycznej. Polepszenie oceny (rozpatrywane w stosunku do liniowego modelu semiwariogramu) pozostaje w ścisłym związku z zasięgiem autokorelacji i praktycznie nie zależy od konkretnych wartości parametrów  $C_0$  i  $b$  (tab. 3). W poszczególnych analizowanych sytuacjach rozpoznania, przy tym samym zasięgu autokorelacji odniesionym do rozstawu punktów rozpoznawczych, obserwuje się zbliżone wartości  $\varepsilon_M/\varepsilon_L$ . Uzasadnia to uwzględnianie w ocenie efektywności tej metody dodatkowo zasięgu autokorelacji obserwacji.

Z danych przedstawionych na rysunku 4 wynika, że w przypadku szacowania zasobów w parcelach o rozmiarach nie przekraczających odległości między wyrobiskami, poprawę oceny — odpowiadającą sytuacji, kiedy zasięg autokorelacji obserwacji jest nieograniczony (tzn. przy liniowym modelu semiwariogramu) — uzyskuje się przy zasięgu semiwariogramu liniowym-Matherona ( $a$ ) równym rozstawowi wyrobisk rozpoznawczych  $L$ . W sytuacji gdy

zasięg ten wynosi 0,7 L, polepszenie dokładności oceny ( $\epsilon_M$ ) stanowi przeciętnie około 70% wzrostu dokładności uzyskiwanego przy liniowym modelu semiwariogramu ( $\epsilon_L$ ). Jeśli rozmiar parcel zasobowych przekracza znacznie rozstaw sieci rozpoznawczej, najczęściej 70-procentowy wzrost dokładności osiągnąć jest dopiero przy zasięgu autokorelacji odpowiadającym 0,9 L. A zatem, przy takim sposobie podziału złoża na bloki stosowanie krigingu jest w pełni celowe, gdy zasięg semiwariogramu przekracza rozstaw punktów rozpoznawczych, tj. gdy sąsiednie obserwacje są ze sobą wzajemnie skorelowane.

Zwraca uwagę fakt, że w niektórych sytuacjach szacowania wzrost dokładności oceny ( $\epsilon_M$ ) jest wyższy niż przy modelach liniowych bez asymptoty ( $\epsilon_L$ ). Dotyczy to przede wszystkim sytuacji, kiedy rozmiary bloków odpowiadają rozstawowi wyrobisk lub są od niego większe, a zasięg autokorelacji przekracza odległość pomiędzy sąsiednimi obserwacjami (rys. 4). Trudno jest jednoznacznie wskazać przyczynę tego zjawiska. Najprawdopodobniej związane jest ono ze specyficzną postacią funkcji opisującej ten typ semiwariogramu (z raptowną zmianą przebiegu wykresu funkcji  $\gamma(h)$  przy odległości  $h$  równej zasięgowi autokorelacji  $a$ ). Być może zjawisko to ma jakiś związek z nie w pełni pozytywnym zdefiniowaniem tej funkcji. Według Armstrong (1998) stosowanie modeli liniowych-Matherona w ocenach dokonywanych metodą krigingu w przestrzeni dwuwymiarowej może bowiem prowadzić do uzyskiwania ujemnych wielkości błędów ocen ( $\sigma_K$ ). Wyniki przeprowadzonych obliczeń, a także dotychczasowych estymacji prowadzonych z wykorzystaniem tych modeli nie potwierdzają jednak tych spostrzeżeń. Wyjaśnienie tej kwestii wymaga zatem przeprowadzenia odrębnych rozważań teoretycznych. Dodatkowych informacji na ten temat mogłoby dostarczyć porównanie uzyskanych wyników ocen z rezultatami szacowań dokonanych w warunkach innych modeli z ograniczonym wzrostem, np. sferycznych.

Uzyskane wyniki prowadzą do następujących wniosków dotyczących opłacalności stosowania metody geostatystycznej w obliczaniu zasobów złóż przy ograniczonym zasięgu autokorelacji obserwacji.

Jeśli zmienność parametru opisuje model liniowy semiwariogramu z ograniczonym wzrostem (model liniowy-Matherona), za celowe uznać należy stosowanie tej metody, gdy spełnione są wymagania co do wielkości wskaźnika  $K$  ujęte w tabeli 2, a także gdy spełniony jest warunek:

- $a \geq L$  — dla regularnej izometrycznej sieci rozpoznawczej (gdzie  $a$  — zasięg semiwariogramu a  $L$  — rozstaw sieci),
- $a \geq \bar{L}$  — w pozostałych przypadkach (gdzie  $\bar{L}$  — średnia odległość między sąsiednimi obserwacjami).

Jeśli rozmiary parcel zasobowych wyznaczonych na zasadzie bloków geologicznych przekraczają rozstaw sieci rozpoznawczej, a zmienność lokalna parametru ( $C_0$ ) nie występuje lub jest słabo zaznaczona, tzn. przy niskich wartościach  $K : L$ , uzasadnione jest stosowanie tej procedury już przy zasięgu autokorelacji obserwacji:

- $a \geq 0,7L$  — przy regularnej izometrycznej sieci rozpoznawczej,
- $a \geq 0,7\bar{L}$  — w pozostałych przypadkach.

Szczególnie wskazane jest stosowanie metody krigingu w sytuacji, gdy rozmiary bloków odpowiadają rozstawowi wyrobisk lub są od niego większe, a zasięg autokorelacji przekracza

odległość pomiędzy sąsiednimi obserwacjami. Uzasadnione jest wówczas stosowanie tej metody nawet przy nieco większych wartościach  $K : L$  od podanych w tabeli 2.

Jeśli zasięg semiwariogramu jest większy od rozmiarów ocenianych bloków i przekracza maksymalną odległość między obserwacjami uwzględnianymi w ich szacowaniu, to w obliczeniach wystarczy posługiwać się wyłącznie równaniem liniowego modelu bez asymptoty opisującego zmienność parametru na odległościach  $h \leq a$  (rys. 1). Można wówczas pominąć występowanie ograniczonego zasięgu autokorelacji obserwacji.

### 3. Przykłady zastosowania metody krigingu

Informacji na temat efektywności stosowania metody krigingu dostarczają również wyniki praktycznych zastosowań tej procedury.

Metodę geostatystyczną zastosowano do oceny miąższości wybranych pokładów węgla występujących na obszarze GZW. Stosując procedurę krigingu i metodę średniej arytmetycznej oszacowano miąższość węgla w wytypowanych parcelach obliczeniowych zasobów.

W pierwszej kolejności przeprowadzono badania struktury zmienności pokładów. Określono wartości liczbowe podstawowych miar zmienności, a w ramach geostatystycznego opisu wyliczono semiwariogramy analizowanego parametru i dokonano ich aproksymacji funkcjami teoretycznymi (tab. 4).

Wszystkie semiwariogramy miąższości mają charakter nielosowy, co uwidacznia się zaznaczoną tendencją wzrostową ich wartości wraz ze wzrostem odległości między punktami pomiarów. Badane pokłady charakteryzują się jednak różną zmiennością. Każdy pokład cechuje się odmiennym jej stylem, co przejawia się w różnych postaciach modeli semiwariogramów lub w różnych wartościach ich parametrów.

Uzyskane wyniki potwierdzają wnioski wynikające z przeprowadzonych badań modelowych. Jak wynika z przeprowadzonych obliczeń, efektywność metody krigingu warunkowana jest charakterem zmienności parametru, a także geometrią ocenianych bloków i sieci rozpoznawczej. Wyniki obliczeń potwierdzają słuszność przyjętych zaleceń odnośnie do celowości stosowania tej metody. Z uwagi na zróżnicowaną wielkość wskaźnika  $K : L$  różna jest skuteczność zastosowania metody krigingu (tab. 4).

Pełniejszych informacji na temat skuteczności stosowania metody krigingu przy dokumentowaniu złóż dostarczają rezultaty przeprowadzonej estymacji zasobów pokładu 301 złoża węgla kamiennego „Oświęcim-Polanka”.

Analizowany pokład rozpoznany został otworami wiertniczymi. Sieć wierceń nie jest całkiem regularna. Przeciętna odległość między otworami wynosi 3000 m.

Miąższość pokładu wynosi średnio 1,02 m i charakteryzuje się ona umiarkowaną zmiennością. Współczynnik zmienności wynosi 45,7%. Przeprowadzone badania geostatystyczne wykazały, że zmienność miąższości pokładu nie jest w pełni losowa i daje się zadowalająco opisać modelem semiwariogramu liniowym-Matherona o parametrach:  $C_0 = 0,06 \text{ m}^2$ ,  $C = 0,179 \text{ m}^2$ ,  $b = 0,0000183 \text{ m}^2/\text{m}$ ,  $a = 6500 \text{ m}$ . Wyniki badania struktury zmienności pokładu wskazywały na możliwość i celowość wykorzystania krigingu do ustalenia zasobów węgla.



TABELA 4

Charakterystyka efektywności stosowania metody krigingu na przykładzie wybranych złóż

TABLE 4

Characteristic of the effectiveness of the kriging application for selected mineral deposits

Kopalnia		KWK Janina	KWK Kazimierz- -Juliusz	KWK Zofiówka	KWK Bielszowice		
Pokład		119/2	349	404/2	501		
Charakterystyka miąższości pokładu węgla	Parametry statystyczne	m [m]	2,15	1,44	2,23	1,42	
		s [m]	0,55	0,57	0,05	0,20	
		v [%]	34,5	52,1	9,8	31,7	
	Geostatystyczny model zmienności	Typ modelu		liniowy- -Matherona	liniowy	liniowy- -Matherona	liniowy
		Parametry modelu	$C_0$ [m <sup>2</sup> ]	0	0,4	0,015	0,055
			b [m]	0,000313	0,000072	0,000018	0,0001
			C [m <sup>2</sup> ]	0,375	—	0,05	—
	a [m]		1200	—	1900	—	
Wielkość wskaźnika K		0	5555	830	550		
Wielkość wskaźnika K odniesiona do rozstawu wyrobisk L		0	11,10	1,04	2,20		
Sposób podziału złoża na bloki		bloki geologiczne o różnych rozmiarach					
Liczba ocenionych bloków		19	21	80	17		
Wzrost dokładności ocen z tytułu zastosowania metody krigingu $\varepsilon^*$ [%]		2,2—38,7 śr. 20,9	0,0—0,3 śr. 0,1	0,0—26,5 śr. 7,1	0,3—7,8 śr. 2,6		

\* — wyliczony dla poszczególnych ocenionych bloków z formuły (4)

Określony z przebiegu semiwariogramu wskaźnik K wynosi 3280. Jego wielkość odniesiona do średniej odległości między otworami rozpoznawczymi ( $K : L$ ).

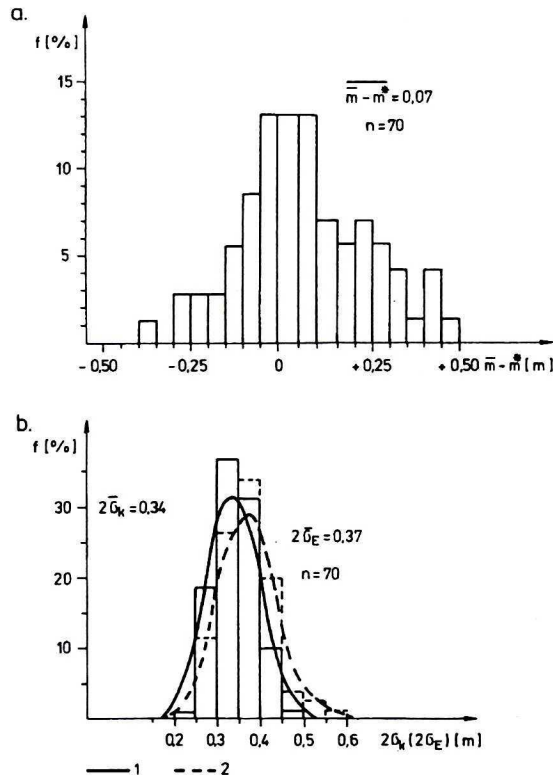
Przed przystąpieniem do oszacowania zasobów metodą geostatystyczną wyznaczono granice zasobów bilansowych i pozabilansowych w oparciu o mapę izolinii miąższości sporządzoną techniką krigingu punktowego. Stosując procedurę krigingu blokowego oszacowano miąższość pokładu węgla w poszczególnych parcelach obliczeniowych wydzielonych na zasadzie bloków geologicznych. Rozmiary parcel są na ogół mniejsze od rozstawu otworów.

W celu zbadania efektywności stosowania metody krigingu do oceny średniej miąższości zastosowano również metodę średniej arytmetycznej. Wyniki geostatystycznej analizy zestawiono także z rezultatami obliczeń metodą przyjętą w dokumentacji, w której średnią miąższość pokładu w parcelach określono z przebiegu izolinii parametru. Mapa izolinii została opracowana ręcznie przy zastosowaniu zasady interpolacji liniowej.



W oparciu o przedstawione w artykule formuły przeanalizowano dokładność szacowania parametru metodą krigingu i średniej arytmetycznej. Dokładności szacowania średniej grubości pokładu w przyjętej metodzie ich określania na podstawie przebiegu izolinii nie da się ściśle określić.

Uzyskane wyniki obliczeń potwierdziły wcześniejsze spostrzeżenia co do efektywności stosowania procedury krigingu. Pomiedzy wynikami obliczeń procedurą krigingu i metodą średniej arytmetycznej występują rozbieżności. Różnice w ocenie średniej miąższości pokładu w pojedynczych blokach wynoszą od  $\pm 0,01$  do  $\pm 0,5$  m (rys. 5). Daje to w typowym bloku o powierzchni  $2 \text{ km}^2$  różnicę w ocenie zasobów węgla wielkości około 25 000—1 200 000 ton.



Rys. 5. Graficzne zestawienie wyników oszacowania miąższości pokładu 301

- a — histogram różnic pomiędzy wynikami ocen miąższości pokładu metodami krigingu i średniej arytmetycznej,  
 b — histogramy i wyrównane krzywe częstości błędów oszacowania miąższości pokładu,  
 1 — metoda krigingu, 2 — metoda średniej arytmetycznej,  $\bar{m}$  — miąższość pokładu w pojedynczej parceli ustalona metodą średniej arytmetycznej,  $m^*$  — średnia miąższość pokładu w pojedynczej parceli oszacowana metodą krigingu,  $n$  — liczba parcel obliczeniowych zasobów,  $\sigma_E$  — błąd ekstensji,  $\sigma_k$  — błąd krigingu

Fig. 5. Graphic comparison of the results of the seam thickness estimation (coal seam no. 301)

- a — histogram of differences in the results of seam thickness estimation provided by kriging and arithmetic mean method, b — histograms and smoothed distribution curves of the confidence intervals (standard deviations) provided by the two methods, 1 — kriging, 2 — arithmetic mean method,  $\bar{m}$  — mean seam thickness estimated in single block by arithmetic mean method,  $m^*$  — mean seam thickness in single block estimated by kriging,  $n$  — number of estimated blocks,  $\sigma_E$  — extension standard deviation,  $\sigma_k$  — kriging standard deviation

Największe różnice obserwuje się w tych partiach pokładu, w których otwory rozmieszczone są skrajnie nieregularnie względem siebie i ocenianych bloków. Dotyczy to szczególnie bloków usytuowanych blisko konturu złoża.

Zwracają również uwagę różnice w błędach ocen średniej miąższości pokładu obiema metodami (rys. 5). Wyniki badań wskazują na wyższą efektywność oceny krigingiem. Błędy krigingu ( $\sigma_k$ ) są średnio o około 8% niższe w stosunku do błędów oceny metodą statystyczną ( $\sigma_E$ ). Obserwuje się przy tym wyraźne zróżnicowanie skali polepszenia oceny w pojedynczych blokach. Znajduje to uzasadnienie w zmiennej geometrii bloków i sieci rozpoznawczej. Wzrost dokładności ocen z tytułu zastosowania metody krigingu ( $\epsilon$ ) wynosi w poszczególnych parcelach zasobowych od 2 do 26%.

W nieco mniejszym zakresie różnią się wyniki ocen procedurą geostatystyczną i metodą opartą na ustalaniu grubości pokładu z przebiegu izolinii. Różnice w ocenie tymi metodami miąższości pokładu w parcelach wahają się od  $\pm 0,01$  m do  $\pm 0,35$  m.

Przedstawione powyżej wyniki dotyczą oszacowania miąższości pokładu w pojedynczych parcelach obliczeniowych. Różnice w globalnych jego zasobach ustalonych różnymi metodami są znacznie mniejsze. Zasoby ustalone metodą krigingu są o około 7% mniejsze od obliczonych metodą średniej arytmetycznej. Natomiast zasoby ustalone metodą przyjętą w dokumentacji są o około 1% wyższe od określonych metodą geostatystyczną.

Obserwowane różnice w zasobach należy upatrywać w odmiennym sposobie geometryzacji pokładu. W dokumentacji założono, że miąższość pokładu ma w pełni charakter nielosowy i opisano jej zróżnicowanie za pomocą mapy izolinii. W podejściu statystycznym założono, że zmienność miąższości (w granicach wydzielonych rodzajów zasobów) ma wyłącznie charakter losowy, natomiast w metodzie krigingu uwzględniono w obliczeniach obecność zarówno składnika losowego, jak i nielosowego w obserwowanej zmienności parametru.

Nieco większe różnice obserwuje się w ocenie poszczególnych rodzajów zasobów. Ustalone w dokumentacji zasoby bilansowe pokładu są o około 3% mniejsze od oszacowanych metodą krigingu, natomiast zasoby pozabilansowe, których udział stanowi około 6% w ogólnych zasobach są o około 40% większe.

Występujące rozbieżności w ocenie poszczególnych rodzajów zasobów wynikają głównie z odmiennego sposobu interpretacji przebiegu granic złoża. W podejściu geostatystycznym uwzględnienie informacji o strukturze zmienności parametru opisanej za pomocą semiwariogramu umożliwiło uściślenie przebiegu granic złoża.

Jak wynika z przeprowadzonych badań, występujące rozbieżności w ocenach poszczególnych parcel nie prowadzą do istotnych różnic w globalnych zasobach złoża. Efektywność metody krigingu, uwidaczniająca się przy lokalnych ocenach w pojedynczych parcelach, niejako „rozmywa się” przy rozpatrywaniu zasobów całkowitych złoża.

Poczynione spostrzeżenia znajdują potwierdzenie w rezultatach badań prowadzonych nad dokładnością ocen zasobów złóż. Jak wynika z przeprowadzonych dotychczas badań, różnice między wielkościami zasobów uzyskiwanymi za pomocą różnych metod ich obliczania na ogół nie przekraczają 10% (np. Nieć 1990). Należy tu podkreślić, że w pracach tych nie rozpatrywano metody krigingu.

Brak wyraźnych rozbieżności w ocenie wielkości globalnych zasobów nie zaprzecza celowości stosowania metody krigingu. Metoda ta daje w porównaniu z innymi procedurami

dokładniejsze i pełniejsze informacje na temat rozmieszczenia zasobów w nawiązaniu do przyjętego podziału złoża na bloki. Ponadto metoda ta w porównaniu z innymi daje możliwość oceny dokładności oszacowania średnich wartości parametrów złoża, a zatem również i zasobów. Stwarza to możliwość szczegółowego analizowania stopnia rozpoznania zasobów (np. Kokesz 1992).

Brak wyraźnych różnic w globalnych zasobach ustalonych metodami średniej arytmetycznej i krigingu przy jednocześnie znacznych rozbieżnościach w ocenach poszczególnych parcel sugeruje, że w przypadku metody średniej arytmetycznej występuje zjawisko lokalnego zawyżania lub zaniżania zasobów. Znajduje to częściowo potwierdzenie w wynikach dotychczasowych prac. Przeprowadzone na złożach siarki badania wskazują, że stosowanie innej metody obliczeń — metody wieloboków, prowadzi również do zawyżania faktycznych zasobów w partiach bogatszych złoża oraz do ich zaniżania w partiach uboższych (Kokesz 1991; Kokesz, Krysiak, Dolik 1994).

### Podsumowanie

Spśród czynników warunkujących efektywne stosowanie metody krigingu w obliczaniu zasobów decydujące znaczenie ma charakter zmienności parametrów złożowych. Warunkiem koniecznym skutecznego stosowania tej metody jest nielosowy charakter zmienności parametrów, wyrażający się poprzez autokorelację wyników ich obserwacji.

Skuteczność stosowania metody krigingu w warunkach liniowych modeli semiwariogramów parametrów złożowych zależy od wzajemnego stosunku lokalnej zmienności ( $C_0$ ) do współczynnika nachylenia wykresu semiwariogramu ( $b$ ) charakteryzującego intensywność zmienności parametru. Wraz ze zmniejszaniem się wartości  $C_0/b$  wzrasta skuteczność tej metody. W przypadku modeli liniowych-Matherona efektywność metody krigingu warunkowana jest ponadto zasięgiem autokorelacji obserwacji.

Skuteczność metody krigingu w obliczaniu zasobów warunkowana jest również geometrią sytuacji szacowania, przede wszystkim wielkością rozstawu wyrobisk rozpoznawczych oraz sposobem podziału złoża na bloki obliczeniowe.

Istnieją racjonalne granice efektywności, jaką można uzyskać stosując tę metodę. W przypadku szacowania tą metodą zasobów w pojedynczych blokach wyznaczonych na zasadzie bloków geologicznych lub eksploatacyjnych, można oczekiwać maksymalnie około 15—50% wzrostu dokładności oceny w stosunku do uzyskiwanej metodą średniej arytmetycznej.

Stosowanie procedury krigingu umożliwia pozyskiwanie dokładniejszych informacji o zasobach, przede wszystkim o ich rozmieszczeniu w granicach złoża i obszarze występowania poszczególnych rodzajów zasobów.

Znajomość semiwariogramów umożliwia prognozowanie efektywności stosowania metody krigingu, a tym samym pozwala na wybór metody obliczania zasobów, a także na podejmowanie decyzji co do celowości sporządzania map izolinii parametrów złoża. Zwrócić wypada tu uwagę, że znajomość semiwariogramów stwarza również możliwości szczegółowego analizowania stopnia rozpoznania zasobów. Przy dokumentowaniu złóż winna zatem znaleźć zastosowanie geostatystyczna metoda opisu zmienności. Dla parametrów uwzględnianych w obliczaniu



zasobów, a także cech, których zróżnicowanie może być przedstawione na mapach, powinny być konstruowane semiwariogramy.

Przeprowadzone badania umożliwiły sformułowanie zaleceń odnośnie do efektywnego stosowania procedury krigingu w przypadku zmienności parametrów złoża opisanej liniowymi modelami semiwariogramów.

Uzyskane wyniki wskazują na potrzebę podjęcia badań w celu opracowania metodyki prognozowania efektywności stosowania procedury krigingu w warunkach innych modeli semiwariogramów parametrów złożowych.

Praca wykonana w ramach badań własnych nr 10 10140 248 finansowanych przez KBN.

#### LITERATURA

- Armstrong M., 1998 — *Basic Linear Geostatistics*. Springer, Berlin.
- Dolik M., Kokesz Z., Nicé M., 1988 — Sens i bezsens map izolinii. *Mat. Sem. nt. Metodyka rozpoznawania i dokumentowania złóż kopalin stałych*. Karpacz, Wyd. AGH, 216—219.
- Dziedzic C., Mikrut J., 1986 — Geostatystyka — przegląd zastosowań w górnictwie. *Przegl. Górn.* nr 9, 274—277.
- Journel A.G., Huijbregts Ch.J., 1978 — *Mining Geostatistics*. Academic Press, London.
- Kokesz Z., 1988 — Geostatystyczna procedura obliczania zasobów niesfałdowanych złóż węgla kamiennego. *Zesz. Nauk. Polit. Śl., s. Górn.*, z. 172, 59—77.
- Kokesz Z., 1988 — Obliczanie zasobów metodą krigingu. *Mat. Sem. nt. Metodyka rozpoznawania i dokumentowania złóż kopalin stałych*. Karpacz, Wyd. AGH, Kraków, 143—160.
- Kokesz Z., 1991 — Geostatistical reserves estimation for native sulphur deposits mined by underground melting. *Science de la Terre, ser. Inf. 31*, Nancy, 223—238.
- Kokesz Z., 1992 — Zastosowanie metod geostatystycznych do wyznaczania granic złoża i oceny dokładności rozpoznania zasobów. *Górn. Odkr. t. XXXIV*, nr 3—4, 27—40.
- Kokesz Z., 1994 — Wykorzystanie metod geostatystycznych przy dokumentowaniu złóż kruszywa naturalnego. *Górn. Odkr. t. XXXVI*, nr 6, 47—55.
- Kokesz Z., 2000 — Efektywność stosowania metody krigingu w szacowaniu zasobów złóż. *Górn. Odkr. t. XLII*, nr 2—3, 77—93.
- Kokesz Z., Krysiak Z., Dolik M., 1994 — Zastosowanie krigingu w obliczeniu zasobów złoża siarki Osiek. *Przegl. Geol.* nr 11, 935—938.
- Kokesz Z., Mucha J., 1987 — Prognozowanie wartości parametrów złóż węgla metodą krigingu w warunkach LZW. *Zesz. Nauk. Polit. Śl., s. Górn.*, z. 155, 91—106.
- Kokesz Z., Mucha J., 1987 — Dotychczasowe doświadczenia w zastosowaniu metod geostatystycznych w geologii górniczej w Polsce. *Mat. Sem. nt. Metody matematyczne i technika komputerowa w górnictwie*. Szklarska Poręba, Wyd. GIG, t. III, 45—55.
- Kokesz Z., Nicé M., 1992 — *Metody geostatystyczne w rozpoznawaniu i dokumentowaniu złóż oraz w ochronie środowiska*. *Studia i Rozprawy*, z. 19, CPPGSMiE PAN, Kraków.
- Mikrut J., 1986 — Możliwości i korzyści zastosowania metod geostatystycznych w geologii. *Zesz. Nauk. Polit. Śl., s. Górn.*, z. 149, 97—105.
- Mucha J., 1979 — Możliwości zastosowania krigingu w warunkach śląsko-krakowskich złóż cynkowo-ołowiowych. *Przegl. Geol.* nr 12, 662—665.
- Mucha J., 1985 — Optymalizacja rozpoznania eksploatacyjnego i oceny parametrów złożowych. *Gosp. Sur. Miner.* t. 1, z. 2, 353—362.
- Mucha J., 1994 — *Metody geostatystyczne w dokumentowaniu złóż*. Wyd. AGH, Kraków.
- Mucha J., Kokesz Z., 1986 — Zastosowanie geostatystyki i krigingu w ustalaniu zasobów węgla kamiennego i prognozowaniu parametrów złoża. *Zesz. Nauk. Polit. Śl., s. Górn.*, z. 149, 107—120.



- Mucha J., Kokesz Z., Dolik M., 1994 — Szacowanie zasobów złóż masywowo-sztokwerkowych z wykorzystaniem metod geostatystycznych — na przykładzie złoża Mo-W-Cu Myszków. *Przegl. Geol.* nr 11, 939—942.
- Namysłowska-Wilczyńska B., 1988 — Efektywność metody block-krigingu w szacowaniu parametrów złoża rud Cu. *Mat. Sem. nt. Metodyka rozpoznawania i dokumentowania złóż kopalni stałych.* Karpacz, Wyd. AGH, Kraków, 161—170.
- Namysłowska-Wilczyńska B., 1993 — Zmienność złóż rud miedzi na monoklinie przedsudeckiej w świetle badań geostatystycznych. *Prace Nauk. Inst. Geotechn. i Hydrotechn. Polit. Wrocł., s. Monografie,* nr 21.
- Nieć M., 1988 — Kierunki doskonalenia metodyki dokumentowania złóż kopalni stałych. *Mat. Sem. nt. Metodyka rozpoznawania i dokumentowania złóż kopalni stałych.* Karpacz, Wyd. AGH, Kraków, 9—26.
- Nieć M., 1990 — *Geologia Kopalniana.* Wyd. Geologiczne, Warszawa.
- Nieć M., Kokesz Z., Dolik M., 1989 — Zastosowanie metod geostatystycznych w badaniu złóż kruszywa naturalnego. *Przegl. Geol.* nr 12.
- Zasady dokumentowania złóż kopalni stałych. Ministerstwo Środowiska, Departament Geologii i Koncesji Geologicznych, Komisja Zasobów Kopalni, Warszawa 2002.

ZBIGNIEW KOKESZ

#### KRIGING AND ITS EFFECTIVENESS IN RESERVES ESTIMATION

##### Key words

Mineral deposit reserves estimation, geostatistics

##### Abstract

In the paper, the effectiveness of the kriging application for the estimation of mineral deposits reserves was characterized. The effectiveness of kriging, when linear models of semivariograms of deposit parameters exist, was analyzed basing on model testing and results of practical applications of the method. It was found that the knowledge of semivariograms enables forecasting the effectiveness of kriging and thus, enables the choice of a method for the reserves estimation. The studies have been allowed to determine the range of effective usage of kriging. The issue is significant in order to define the rules of kriging application in routine elaboration of results of mineral deposits exploration.