

TADEUSZ TUMIDAJSKI*, DANIEL SARAMAK**

Wielowymiarowa analiza wskaźników oceny przebiegu procesów inżynierii mineralnej opartych na prawie zachowania masy

Słowa kluczowe

Wskaźniki oceny procesów przeróbczych, analiza wielowymiarowa, prawo zachowania masy

Streszczenie

W artykule przedstawiono przegląd i klasyfikację wskaźników oceny przebiegu procesów przeróbczych opartych na prawie zachowania masy, czyli wyrażonych poprzez związki między średnimi zawartościami składników w produktach. Potraktowanie wzorów jako powierzchni trójwymiarowych pozwoliło na lepszą charakterystykę wskaźników, a także na wskazanie możliwych kierunków aproksymacji zależności dwuwymiarowych. Wytypowano także wskaźniki o najlepszych własnościach informacyjnych.

Wprowadzenie

Z punktu widzenia technologa przebieg procesów wzbogacania oceniany jest proporcjami rozdziału masy na produkty oraz stopniami odzysku składnika użytecznego. Ważną informacją jest także ocena trudności czy łatwości rozdziału. Wskaźniki oceny surowców mineralnych, w tym ich podatności na określony typ procesów wzbogacania (modelowych operacji technologicznych), opierają się na średnich zawartościach składników użytecznych w nadawie i produktach. Podstawowe kombinacje tych wielkości stanowią wychody produktów oraz uzyski czy straty składników użytecznych.

Z geometrycznego punktu widzenia wzory określające wskaźniki są równaniami hiperpowierzchni (z reguły czterowymiarowych), które po ustaleniu średniej zawartości składnika

* Dr hab., prof. AGH, ** Mgr inż., Wydział Górnictwa AGH, Kraków.

w nadawie przechodzą w równanie powierzchni drugiego stopnia w przestrzeni trójwymiarowej. Istnieje ścisła klasyfikacja takich powierzchni, dzięki której możliwa jest ich dokładna charakterystyka (punkty krytyczne, charakter wypukłości itp.). Te charakterystyki mogą być interesujące dla technologa, ponieważ mogą być miarami trudności rozdziału materiałów uziarnionych w pewnych obszarach wartości średnich zawartości składnika w koncentracji i odpadach. Takimi miarami mogą być: pochodne kierunkowe, gradient wskaźnika, promień krzywizny powierzchni, miara wypukłości czy też wklęsłości.

Można postawić tezę, że wskaźnikiem dobrze uwarunkowanym będzie taki wskaźnik, którego wymienione wyżej charakterystyki będą zgodne ze skalą trudności wzbogacania w wybranych obszarach wartości zmiennych.

Wiele z omówionych spraw można zilustrować wykresami przestrzennymi, operując odpowiednimi kątami widzenia powierzchni i kątami skręcenia osi układu. Tym problemom poświęcona jest prezentowana praca, czyli klasyfikacji powierzchni, charakterystykom ich zmienności oraz prezentacji graficznej. Powinno to pozwolić na dokładniejszą analizę przydatności badanych wskaźników, a nawet na ich pewną uzasadnioną korektę.

1. Rozdział materiałów uziarnionych

Podstawową cechą procesów przeróbki surowców mineralnych jest rozdział materiału na produkty, które różnią się między sobą rozkładami wielu cech charakteryzujących materiał.

Przechodzenie ziarn do produktów uwarunkowane jest łącznym oddziaływaniem sił wymuszających ruch ziarn w przestrzeniach roboczych urządzeń. Warto zwrócić uwagę na to, że w przypadku procesów wzbogacania lub klasyfikacji ziarna nie ulegają (założenie teoretyczne) rozpadowi i przechodzą do produktów niezmiennione. W przypadku rozdrabniania tworzenie produktu odbywa się poprzez podział ziarna i przejście jego fragmentów do klas drobniejszych, które stanowią produkt rozdrabniania.

Przy takim podejściu do matematycznego modelowania procesów przerobczych prawo zachowania masy staje się podstawowym prawem stosowanym w postaci równania bilansu. Jak się okazuje, wiele istotnych modeli opiera się na tym prawie, przy czym różnice między nimi polegają na przyjętych założeniach (interpretacjach zjawisk) oraz użytych metodach matematycznych.

Założmy, że rozpatrujemy, jedną cechą ziarna W (rozmiar, gęstość, zawartość składnika, itp.). Założmy także, że następuje rozdział elementarnych frakcji ($w, w + dw$) na produkty (frakcje) ($x, x + dx$), gdzie X oznacza zmienną ciągłą będącą podstawą podziału na produkty. W przypadku rozdrabniania X będzie z reguły wielkością ziarna, a rozdział frakcji polega na przejściu fragmentów ziarn z frakcji ($w, w + dw$) do poszczególnych klas ziarnowych produktu; przy wzbogacaniu grawitacyjnym będą to frakcje gęstościowe, przy flotacji można przyjmować np., że X jest wysokością progu przelewowego w maszynie flotacyjnej itp. Proponowana unifikacja opisu ma na celu pokazanie ogólnej struktury modeli matematycznych procesów rozdziału, a jej uszczegółowienia będą wymagać sprecyzowania charakterystyk używanych zmiennych.

Zmienna losowa W charakteryzowana jest funkcją gęstości $f(w)$ i udział elementarnej frakcji $(w, w + dw)$ określa iloczyn $f(w)dw$. Wprowadźmy funkcję $p(w,x)$ oznaczającą prawdopodobieństwo przejścia ziarna (fragmentu tego ziarna) z frakcji $(w, w + dw)$ do produktu $(x, x + dx)$.

Ilość materiału przechodząca do produktu $(x, x + dx)$ z frakcji $(w, w + dw)$ wynosi $p(w, x)dx f(w)dw$ i jest sumarycznie równa $g(x)dx$, gdzie $g(x)$ jest funkcją gęstości dla zmiennej X . Zmienną X można potraktować jako zmienną losową ze względu na losowy wybór jej wartości przez ziarno czy jego fragment.

Możemy więc napisać:

$$\int_D p(w, x)f(w)dw = g(x) \quad (1)$$

gdzie:

D — obszar zmienności zmiennej W , czyli:

$$D = \langle w_{\min}, w_{\max} \rangle$$

Ze względu na określenie funkcji $p(w,x)$ mamy

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(w, x)dx = 1 \quad (2)$$

czyli, przy ustalonej wartości „ w ” możemy uznać funkcję $p(w,x)$ za funkcję gęstości rozkładu warunkowego zmiennej losowej X pod warunkiem przyjęcia przez zmienną losową W wartości w , co oznacza, że

$$p(w,x) = p(x|w) \quad (3)$$

dla ustalonego w , traktowanego jako parametr.

Równanie (1) można zatem zapisać:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(x|w)f(w)dw = g(x) \quad (4)$$

Otrzymaliśmy równanie określające rozkład złożony rozkładu warunkowego o gęstości $p(x|w)$ z rozkładem zmiennej losowej W o gęstości $f(w)$ (Fisz 1969; Tumidajski 1993).

Równania (1) i (4) opisują proces powstawania „produktu”. W przypadku procesu rozdrabniania (Broadbent i in. 1956; Brożek i in. 1995; Lynch 1977; Whiten 1974) lub w przypadku błędnego kwalifikowania ziarn do poszczególnych frakcji, $p(x|w)$ jest nazywana wtedy funkcją rozmycia (Eadie i in. 1971).

W przypadku rzeczywistych procesów wzbogacania lub klasyfikacji zakłada się, że ziarno nie ulega degradacji, oraz że następuje rozdział na co najwyżej kilka produktów. Odpowiada to podziałowi obszaru zmienności wielkości X na kilka podprzedziałów. Przypisując poszczególnym produktom wartości x_j (średnie granic przedziałów, numery podprzedziałów itp.) możemy przyporządkować każdemu ziarnu o wartości cechy w prawdopodobieństwo przejścia do j -tego produktu $p(w, x_j)$.

Ze względu na to, że przejścia ziarn nadawy do produktów są zdarzeniami wyłączającymi się oraz ich suma jest zdarzeniem pewnym, możemy dla gęstości $f(w)$ napisać:

$$f(w) = \sum_{j=1}^k p(w, x_j) f_j(w) \quad (5)$$

Obustronne scałkowanie tej zależności w obszarze zmienności cechy W daje związek bilansu mas produktów i układ zależności analogiczny do równania (1)

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} p(w, x_j) f(w) dw = g(x_j) = \gamma_j \quad (6)$$

$$\sum_{j=1}^k \gamma_j = 1$$

dla $j = 1, 2, \dots, k$.

Zależność (5) można przedstawić w postaci

$$f(w) = \sum_{j=1}^k \frac{\gamma_j p(w, x_j) f_j(w)}{\gamma_j} \quad (7)$$

i przez porównanie jej z równaniem bilansu

$$f(w) = \sum_{j=1}^k f_j(w) \gamma_j \quad (8)$$

otrzymujemy

$$f_j(w) = \frac{p(w, x_j) f(w)}{\gamma_j} \quad (9)$$

gdzie $f_j(w)$ są gęstościami rozkładów zmiennej losowej W w produktach.

Z zależności (9) mamy

$$p(w, x_j) = \gamma_j \frac{f_j(w)}{f(w)} \quad (10)$$

czyli prawdopodobieństwa $p(w, x_j)$ są równoważne funkcjom rozdziału definiowanym jak dotychczas w literaturze (Stępiński 1964; Sztaba 1956; Terra 1939; Tichonow 1984).

Uogólnieniem omawianych zależności są równania uwzględniające więcej niż jedną cechę ziarna, przy czym występują tutaj przypadki uwzględniające sposób tworzenia (lub rozumienia) produktu. Rozpatrzmy to zagadnienie dla dwóch cech ziarna W_1 i W_2 kierując się sensem praktycznym, ponieważ dalsze uogólnienia są oczywiste. Materiał uziarniony charakteryzowany jest teraz dwuwymiarową funkcją gęstości $f(w_1, w_2)$. W przypadku procesów przerobczych, których przebieg zależy od tych dwóch wielkości możemy za produkty uważać frakcje dwuwymiarowe charakteryzowane wielkościami X i Y — przy czym w sensie fizycznym X i Y są to zmienne losowe określające te same właściwości co W_1 i W_2 (np. wielkość i gęstość ziarna przy rozdrabnianiu), mające jednak inne rozkłady prawdopodobieństwa — albo jedną wielkością X odpowiadającą sposobowi tworzenia produktu (np. wysokością progu przelewowego przy osadzarce, natężeniem pola magnetycznego itp.). W sposób oczywisty otrzymujemy równania

$$\iint_D p(w_1, w_2, x, y) f(w_1, w_2) dw_1 dw_2 = g(x, y) \quad (11)$$

lub

$$\iint_D p(w_1, w_2, x) f(w_1, w_2) dw_1 dw_2 = g(x) \quad (12)$$

gdzie D jest obszarem zmian wartości zmiennych W_1 i W_2 , przy czym:

$$\int_{x_{\min}}^{x_{\max}} \int_{y_{\min}}^{y_{\max}} p(w_1, w_2, x_1, x_2) dx_1 dx_2 = 1 \quad (13)$$

co oznacza, że materiał o wartościach cech z przedziału uogólnionego ($w_1, w_1 + dw_1; w_2, w_2 + dw_2$) został rozdzielony w całości po produktach ($x, x + dx; y, y + dy$).

Jest rzeczą oczywistą, że rozumowanie przedstawione dla jednej cechy ziarna zachowuje swoją ważność dla większej liczby cech i przez proste uogólnienie otrzymamy wzory analogiczne do wzorów (3)—(10).

2. Wskaźniki oceny rozdziału oparte na średnich zawartościach składników w produktach

Przedstawiona wyżej ogólna analiza procesów rozdziału oparta na prawie zachowania mas wymusza, a zarazem tworzy możliwości budowy wskaźników oceny rozdziału masowego, czyli ocen efektywności przemysłowych i laboratoryjnych procesów rozdziału. Dokonując przeglądu istniejących wskaźników tego rodzaju (Barskij, Rubinstejn 1970) podzielimy je na trzy typy:

- zależności opisujące w przestrzeni trójwymiarowej powierzchnie stopnia drugiego,
- zależności opisujące w przestrzeni trójwymiarowej powierzchnie stopnia trzeciego,
- zależności związane ze zjawiskiem entropii.

Analiza zachowania się wskaźników przedstawiona w tej pracy opiera się na potraktowaniu wszystkich zawartości α , β , ϑ jako zmiennych niezależnych zmieniających się w pewnych sensownych dla nich przedziałach wartości. Wskaźnik oceny „w” traktowany jest jako zmienna zależna. Analityczne i geometryczne podejście do zależności $F(\alpha, \beta, \vartheta, w) = 0$ przy dopuszczeniu zmienności zmiennych w zakresie liczb rzeczywistych nie ma usprawiedliwienia w rzeczywistości, ale pozwala na charakterystykę hiperpowierzchni, która rzuca nowe światło interpretacyjne na wskaźnik oceny przebiegu procesów inżynierii mineralnej.

Przy przyjęciu założenia, że średnia zawartość składnika w nadawie α jest stała i wszystkie wskaźniki wykorzystujące wielkości β i ϑ są funkcjami tylko tych zmiennych, czyli są geometrycznie rzecz biorąc pewnymi powierzchniami stopnia drugiego w przestrzeni trójwymiarowej, badanie charakteru tych powierzchni pozwala na wytypowanie potrzebnych w wielu zadaniach optymalizacyjnych (Jawień i in. 1995) dwuwymiarowych zależności, tzn. funkcji określających zależność wskaźnika od β lub ϑ .

Powierzchnię stopnia drugiego można przedstawić ogólnym równaniem w postaci:

$$a_{11}x^2 + a_{22}x^2 + a_{33}x^2 + 2a_{12}xy + 2a_{13}xz + 2a_{23}yz + 2a_{14}x + 2a_{24}y + 2a_{34}z + a_{44} = 0 \quad (14)$$

z wyłączeniem przypadku, gdy wszystkie współczynniki a_{ij} są równe zero (w naszym przypadku z — wskaźnik, x — β , y — ϑ). Aby określić jaką powierzchnię przedstawia równanie (14), obliczamy dwa symetryczne wyznaczniki W i V, gdzie ($a_{12} = a_{21}$, itd.):

$$W = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} \quad (15)$$

$$W = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

oraz wyrażenia W_1 i W_2 postaci:

$$W_1 = a_{11} + a_{22} + a_{33} \quad (16)$$

$$W_2 = \begin{vmatrix} a_{11}a_{12} \\ a_{21}a_{22} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{22}a_{23} \\ a_{32}a_{33} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} a_{11}a_{13} \\ a_{31}a_{33} \end{vmatrix}$$

Kształt powierzchni opisanej równaniem (14) zależy od rzędu wyznaczników W i V oraz od znaku wyrażeń W_1 i W_2 (Leja 1954)

Wyniki klasyfikacji wskaźników przedstawiających powierzchnie stopnia drugiego zamieszczono w tabeli 1.

Jak wynika z przeprowadzonej analizy, cztery wskaźniki przedstawiają paraboloidy hiperboliczne, a uzysk — hiperboloidę jednopowłokową. Są to wskaźniki, które w pewnym sensie obrazują zmienną łatwość czy trudność wzbogacania zależną od zakresu wartości β i ϑ . Aby lepiej to zilustrować przeanalizujemy dokładniej równanie określające wychód.

Podstawowa zależność charakteryzująca proces wzbogacania to równanie bilansu

$$100\alpha = \gamma\beta + (100 - \gamma)\vartheta \quad (17)$$

TABELA 1

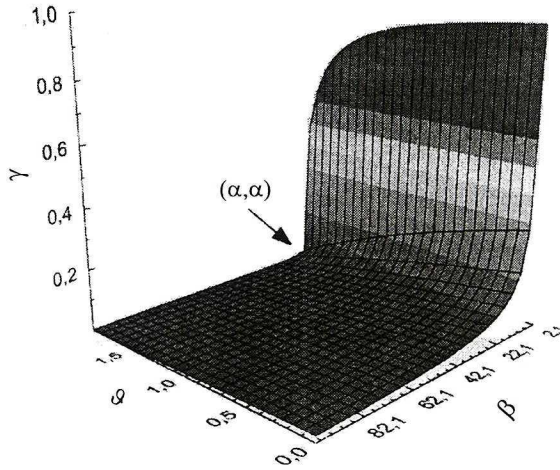
Wskaźniki oceny przebiegu procesów wzbogacania opisane za pomocą powierzchni stopnia drugiego

TABLE 1

Indexes of beneficiation process courses described by second degree surfaces

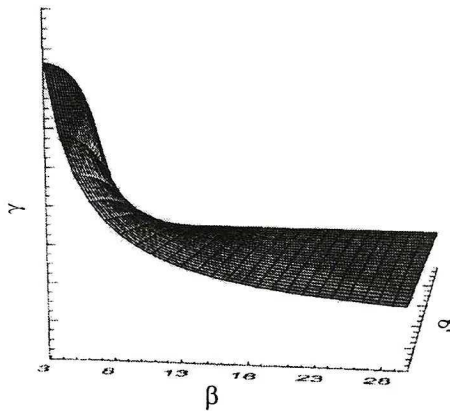
Numer	Autor, rok, nazwa	Wzór	Powierzchnia
1	Wychód	$\gamma = \frac{\alpha - \vartheta}{\beta - \vartheta}$	Paraboloida hiperboliczna
2	Uzysk	$\varepsilon = \frac{\gamma\beta}{\alpha}$	Hiperboloida jednopowłokowa
3	—	$R = \frac{\gamma(1 - \beta)}{1 - \alpha}$	Paraboloida hiperboliczna
4	Taggart	$T = \gamma \frac{\beta - \alpha}{\alpha}$	Stożek rzeczywisty
5	—	$T_T = \gamma \frac{\beta - \alpha}{\alpha} \cdot \frac{1}{\beta_T - \alpha}$	Stożek rzeczywisty
6	Truszwlewiec (1936)	$T_{TR} = \frac{\beta - \alpha}{\alpha(1 - \gamma)}$	Dwie przecinające się płaszczyzny
7	Kuzkin, Gołow (1953)	$K = \frac{\beta(1 - \gamma)}{\alpha - \gamma\beta} = \frac{\beta}{\vartheta}$	Paraboloida hiperboliczna
8	Mazoyoshi Wada	$M = \frac{\beta - \alpha}{1 - \varepsilon}$	Paraboloida hiperboliczna
9	Gaudin (1930)	$G = \frac{\beta(1 - \alpha)}{\alpha(1 - \beta)}$	Dwie płaszczyzny równoległe

Z analityczno-geometrycznego punktu widzenia i dla ustalonego, równanie to przedstawia paraboloidę hiperboliczną (rys. 1 rząd $V = 4$, $W = 0$ i $W_2 > 0$, tab. 1), a mówiąc dokładniej jej wycinek, gdyż $0 < \gamma < 100$, $\beta > \vartheta$ oraz $\vartheta < \alpha$ i $\beta > \alpha$. Przekrojami tej powierzchni dla wybranych ustalonych wartości γ , β lub ϑ są odpowiednio: proste dla ustalonego γ , hiperbola dla ustalonego β lub ϑ . Konkretny wybór wartości zależy od charakterystyki materiału (przy analizach laboratoryjnych) lub charakterystyki materiału i reżimu technologicznego w przypadku wzbogacania przemysłowego. Właściwości materiału i warunki technologiczne są powiązane



Rys. 1. Obraz funkcji $\gamma = \gamma(\beta, \vartheta)$ jako powierzchni w przestrzeni trójwymiarowej

Fig. 1. The image of function $\gamma = \gamma(\beta, \vartheta)$ as the surface in three-dimensional space

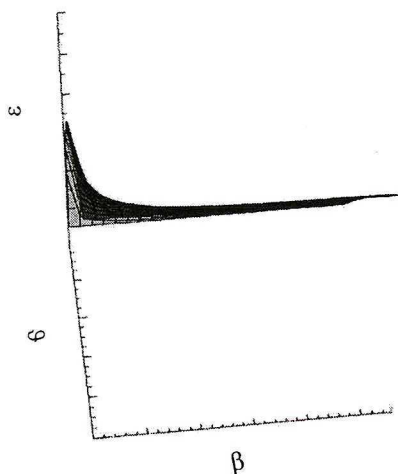


Rys. 2. Rzut powierzchni $\gamma = \gamma(\beta, \vartheta)$ na płaszczyznę (γ, ϑ)

Fig. 2. The projection of $\gamma = \gamma(\beta, \vartheta)$ surface on (γ, ϑ) plane

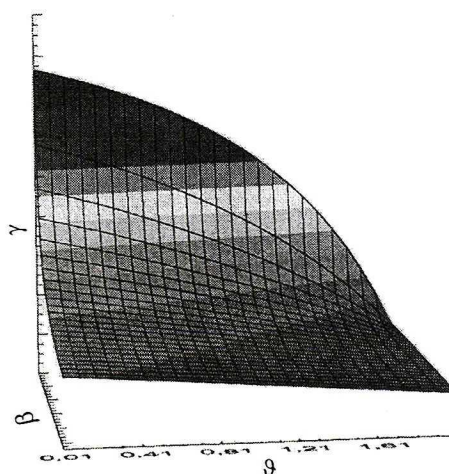
z trajektoriã, która leży na wspomnianej paraboloidzie hiperbolicznej, charakteryzującej przebieg procesu. Zależności potrzebne dla analiz technologiczno-ekonomicznych typu $\gamma = \gamma(\beta)$ lub $\gamma = \gamma(\vartheta)$ uzyskuje się jako rzuty trajektorii leżącej na powierzchni (17) na płaszczyzny układu (β, γ) lub (ϑ, γ) (rys. 2 i 3). Wszystkie rysunki zostały wykonane przy użyciu programu Statistica 5.5 Pl. dla wzbogacania rud miedzi; przyjęto $\alpha = 2\%$.

Analogiczne rzuty otrzymuje się dla funkcji ε rzutując ją na płaszczyzny układu (β, ε) lub (ϑ, ε) (rys. 2a i 3a)



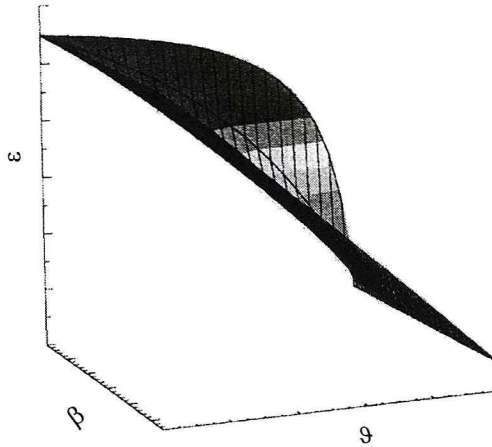
Rys. 2a. Rzut powierzchni $\varepsilon = \varepsilon(\beta, \vartheta)$ na płaszczyznę (ε, β)

Fig. 2a. The projection of $\varepsilon = \varepsilon(\beta, \vartheta)$ surface on (ε, β) plane



Rys. 3. Rzut powierzchni $\gamma = \gamma(\beta, \vartheta)$ na płaszczyznę (γ, ϑ)

Fig. 3. The projection of $\gamma = \gamma(\beta, \vartheta)$ surface on (γ, ϑ) plane



Rys. 3a. Rzut powierzchni $\varepsilon = \varepsilon(\beta, \vartheta)$ na płaszczyznę (ε, ϑ)

Fig. 3a. The projection of $\varepsilon = \varepsilon(\beta, \vartheta)$ surface on (ε, ϑ) plane

Rzuty powierzchni $\varepsilon = \varepsilon(\beta, \vartheta)$, $\gamma = \gamma(\beta, \vartheta)$ pozwalają na określenie postaci wzorów aproksymujących zależności dwuwymiarowe. Jak łatwo zauważyć, dwuwymiarowe zależności $\varepsilon = \varepsilon(\beta)$ i $\gamma = \gamma(\beta)$ mogą być opisywane hiperbolami lub w pewnych zakresach prostymi. Zależności $\varepsilon = \varepsilon(\vartheta)$ i $\gamma = \gamma(\vartheta)$ nie mają tak prostej interpretacji.

Analizując wzór numer 1 w tabeli 1 można stwierdzić, że przy $\vartheta \rightarrow 0$ (idealne wzbogacanie) można uzyskać wychody od α do 100 (w przypadku $\beta = \alpha$). Wyznaczając pochodne ze względu na β i ϑ otrzymujemy gradient $\left[\frac{\vartheta - \alpha}{(\beta - \vartheta)^2}; \frac{\alpha - \beta}{(\beta - \vartheta)^2} \right]$, który ze względu na ograniczenia dla β i ϑ

ma obie składowe ujemne. Jest to zgodne z charakterem zmian wartości wychodu: zwiększanie wartości β i zmniejszanie wartości ϑ powoduje spadek wychodu koncentratu, przy czym decydujące są zmiany β . Biorąc pod uwagę ujemność współrzędnych gradientu należy stwierdzić, że podwyższenie wychodu koncentratu wymaga przesuwania wartości β i ϑ do punktu (α, α) , co odpowiada naturze procesów. Warto zauważyć także, że największe zmiany wychodu obserwuje się w okolicach punktu (α, α) . Im dalej od tego punktu, tym mniejsze są zmiany wychodu (maleje długość gradientu).

Funkcja ciągła dwóch zmiennych $w = w(\beta, \vartheta)$ ma wykres wypukły w pewnym zbiorze D, jeżeli dla dowolnych dwóch punktów (β_1, ϑ_1) i (β_2, ϑ_2) należących do zbioru D zachodzi nierówność:

$$w(a_1\beta_1 + a_2\beta_2, a_1\vartheta_1 + a_2\vartheta_2) \leq a_1w(\beta_1, \vartheta_1) + a_2w(\beta_2, \vartheta_2) \quad (18)$$

przy czym $a_1 \geq 0$, $a_2 \geq 0$ oraz $a_1 + a_2 = 1$. Jeżeli w nierówności (18) występuje znak większości, to wykres „w” jest wklęsły.

W celu określenia charakteru wypukłości wyznaczamy drugie pochodne funkcji $w = w(\beta, \vartheta)$ i wykres w jest wypukły dla obszaru płaszczyzny (β, ϑ) , gdzie

$$\frac{\delta^2 w}{\delta \beta^2} > 0 \quad \text{oraz} \quad S = \frac{\delta^2 w}{\delta \beta^2} \cdot \frac{\delta^2 w}{\delta \vartheta^2} - \left(\frac{\delta^2 w}{\delta \beta \delta \vartheta} \right)^2 > 0 \quad (18a)$$

a wklęsły gdy

$$\frac{\delta^2 w}{\delta \beta^2} < 0 \quad \text{a} \quad S < 0 \quad (18b)$$

Po wyliczeniu wartości wyznacznika S opisanego wzorem (18a) okazało się, że jest on mniejszy od zera, co na podstawie wzoru (18b) pozwala na stwierdzenie, że równanie określające wychód jako funkcję β i ϑ jest funkcją wklęsłą w całej dziedzinie (w zakresie ograniczeń technologicznych dla β i ϑ)

Istotnym punktem na powierzchniach stopnia drugiego $w = w(\beta, \vartheta)$ jest tzw. punkt siodłowy, który określamy jako punkt (β_0, ϑ_0) , dla którego w pewnym jego otoczeniu zachodzi nierówność podwójna:

$$w(\beta, \vartheta_0) \leq f(\beta, \vartheta) \leq f(\beta_0, \vartheta)$$

Z układu tych nierówności wynika, że poszukiwanie punktu siodłowego funkcji można uważać za poszukiwanie maksimum funkcji $w = w(\beta, \vartheta)$ względem β i minimum względem ϑ , a więc rozwiązuje się zagadnienie o postaci $\min_{\beta} \max_{\vartheta} w(\beta, \vartheta)$.

Po wyznaczeniu drugich pochodnych można stwierdzić, że punkt siodłowy powierzchni opisanej równaniem bilansu leży w punkcie $(\alpha, \alpha, 0)$ (rys. 1).

W tabeli 2 przedstawiono wskaźniki, których obrazem są powierzchnie stopnia trzeciego, ale nie mają swojej klasyfikacji. Zostały one zamieszczone dla pełności przeglądu istniejących w literaturze wskaźników opartych na zawartościach składników.

Procesy rozdziału można traktować także jako doświadczenia zmieniające uporządkowanie materiału będącego do nich nadawą, zwiększające rozproszenie składnika użytecznego. Miara nieokreśloności takich doświadczeń mogą być miary Hartley'a lub Shannona (Majewski 1984). Miara Hartley'a będąca logarytmem z liczby możliwych wyników doświadczenia jest z punktu widzenia procesów rozdziału niewiele wnosząca, jeżeli liczbą wyników jest liczba produktów. Lepszą miarą może być entropia wprowadzona przez Shannona:

$$H(A) = \sum_{i=1}^n P(a_i) \log_a \frac{1}{P(a_i)} = - \sum_{i=1}^n P(a_i) \log_a P(a_i)$$

$a > 0$, a_i — możliwy wynik doświadczenia A .

TABELA 2

Wskaźniki oceny przebiegu procesów wzbogacania opisane za pomocą powierzchni stopnia trzeciego

TABLE 2

Indexes of beneficiation process courses described by third degree surfaces

Numer	Autor, rok	Wzór
10	Douglas (1962)	$\frac{(\varepsilon - \gamma)(\beta - \alpha)}{(1 - \gamma)(1 - \alpha)}$
11	Wołoskow (1937), Bajula (1955)	$\frac{\gamma\beta \cdot \beta}{\alpha \cdot \beta_T} = \frac{\varepsilon\beta}{\beta_T}$
12	Drakely (1928), Stevens, Collins (1961)	$\frac{\gamma\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta - \alpha}{1 - \alpha} = \frac{\varepsilon(\beta - \alpha)}{1 - \alpha}$
13	Stevens, Collins (1961)	$\frac{\gamma\beta}{\alpha} \cdot \frac{\beta - \alpha}{\alpha} = \frac{\varepsilon(\beta - \alpha)}{\alpha}$
14	Fomienko (1939)	$\varepsilon(1 - R)$

TABELA 3

Wskaźniki oceny przebiegu procesów wzbogacania oparte na entropii

TABLE 3

Indexes of beneficiation process courses based on entropy

Numer	Autor, rok	Wzór
15	Barski (1960)	$E = 1 - \frac{\lg \varepsilon}{\lg \gamma}$
16	Biełogłazow (1947)	$E = \frac{\lg \frac{1}{1 - \varepsilon}}{\lg \frac{1}{1 - R}}$
17	Steiner (1964)	$E = \varepsilon \left(1 - \frac{\lg \beta}{\lg \alpha} \right)$
18	Kuźniecowa (1950)	$E = \gamma(2\beta - 1) \ln \frac{\beta}{1 - \beta} + (1 - \gamma)(2\vartheta - 1) \ln \frac{\vartheta}{1 - \vartheta}$
19	Rosen (1960)	$E = \gamma[\beta \ln \beta + (1 - \beta) \ln(1 - \beta)] + (1 - \gamma)[\vartheta \ln \vartheta + (1 - \vartheta) \ln(1 - \vartheta)] -$ $- [\alpha \ln \alpha + (1 - \alpha) \ln(1 - \alpha)]$
20	Lewitin, Barski (1966)	$E = -\ln \alpha + \varepsilon \ln \beta + (1 - \varepsilon) \ln \vartheta$

Jako podstawę logarytmów „a” przyjmuje się $a = 2$, $a = e$ lub $a = 10$.

Jeżeli $a = 2$ jednostką entropii jest bit „a” dla $a = e$ — jeden wat. Jeden bit jest entropią doświadczenia, które może przyjąć dwa jednakowo prawdopodobne wyniki.

Zakończenie

Przedstawione elementy analizy i klasyfikacji wskaźników pozwalają na sformułowanie kilku wniosków.

Jak już podkreślono wcześniej, z grupy pierwszej najlepsze są wskaźniki reprezentujące powierzchnie o wyraźnej wklęsłości lub wypukłości, oddające zmienną trudność procesów wzbogacania. Pozostałe wskaźniki oceny nie mają tak dobrych własności. Generalnie rzecz ujmując wydaje się, że wiele wskaźników jest do pominięcia ze względu na niejednoznaczność interpretację lub zawikłaność formuł. Do takich wskaźników należą wszystkie te, które zostały zaklasyfikowane jako oparte na pojęciu entropii, będące nie do końca uzasadnioną próbą przeniesienia wskaźników z jednej dziedziny do drugiej.

Istotną sprawą jest, aby do porównywania wyników wzbogacania używać pary wskaźników wzbogacania z trójki zawartość–wychód–uzysk. Porównywanie takie jest bezproblemowe dla układów o identycznej zawartości składnika użytecznego w nadawie α ; zmienność α prowadzi do bardzo złożonych zasad analizy i porównań. Każdy wskaźnik powinien mieć dokładnie opracowaną skalę interpretacji oceniającą, kiedy jego wartość jest zadowalająca, a kiedy powinna być poprawiona.

Można stwierdzić także, że ze względów praktycznych i teoretycznych ograniczenie liczby stosowanych wskaźników do wychodu, uzysku czy odmiany wzoru Taggarta (nr 5, tab. 1) jest w zupełności uzasadnione i wystarczające.

Artykuł jest wynikiem realizacji projektu badawczego KBN nr 9 T12A 03219

LITERATURA

- Barskij L.A., Rubinštejn Ju.B., 1970 — Kibernetičeskie metody w obogaszczennii poleznych iskopajemych. Izd. Niedra, Moskwa.
- Broadbent R., Callicott T.G., 1956 — Coal breakage processes J. Of Inst. Of Fuel, p. 524—528.
- Brożek M., Mączka W., Tumidajski T., 1995 — Modele matematyczne procesów rozdrabniania. Wyd. AGH, Rozprawy i monografie nr 35, Kraków.
- Eadie W.T., Drijard D., Janas F.E., Ross M., Sadoulet B., 1971 — Statistical methods in experimental physics. North, Holland.
- Fisz M., 1969 — Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna. PWN, Warszawa.
- Jawic M., Jasiewicz J., 1954 — Maksymalizacja zysku KGHM poprzez sterowanie zawartością miedzi w koncentracie. Mat. Konf.: Zastosowanie metod matematycznych w nauce i technice, Kraków 20—21 czerwiec 1995, vol. 1.
- Leja F.: Geometria analityczna. PWN, Warszawa.
- Lynch A.J., 1977 — Mineral crushing and grinding circuits; their simulation, optimisation, design and control. Amsterdam—Oxford—N.York, Elsevier Sci. Publ. Co.
- Majewski J., 1984 — Podstawy teorii informacji. Skrypty uczelniane AGH nr 955, Kraków.
- Stępiński W., 1964 — Wzbogacanie grawitacyjne. PWN, Łódź—Warszawa—Kraków.
- Sztaba K., 1956 — Krzywe rozdziału w procesie klasyfikacji mokrej. Arch. Górn. 1, z. 2.
- Terra A., 1939 — Determination pratique de l'cart probable en densit. Rev. Ind. Miner.
- Tichonow O.N., 1984 — Zakonomiornosti effiektiwnoego razdielenija minieratow w prociessach obogaszczennija poleznych iskopajemych. Izd. Niedra, Moskwa.

- Tumidajski T., 1993 — Zastosowanie metod statystycznych w analizie procesów przeróbczych. Wyd. Śląsk, Katowice.
- Tumidajski T, Blaschke W., 1995 — Determining the dependence between the yields of enrichments products and the contents of a selected component according to the equation of balance. Arch. Sci. vol. 40, issue 2.
- Whiten W.J., 1974 — A matrix theory of comminution machines., Chem. Eng. Sc. 29, 589—599.

TADEUSZ TUMIDAJSKI, DANIEL SARMAK

MULTIDIMENSIONAL ANALYSIS OF MINERAL ENGINEERING PROCESSES COURSE ESTIMATION INDEXES BASED ON THE MASS PRESERVATION LAW

Key words

Estimation indexes of mineral dressing processes, multidimensional analysis, mass preservation law

Abstract

The review and the classification of mineral engineering processes course estimation indexes are presented in article. The indexes are based on the mass preservation law expressed by the dependencies between the average component concentrations in products. The index formula were treated as three-dimensional surfaces and it allowed to obtain better characteristic of indexes and to indicate the approximation direction of two-dimensional dependencies. The indexes with the best properties informational were pointed.