

WIESŁAW PIWOWARSKI

Model relacyjny — wyniki pomiaru a ilościowy opis procesu losowego

Słowa kluczowe

Eksploatacja podziemna, łańcuch Markowa, pomiary geodezyjne, proces niestacjonarny, przemieszczenia pogórnice, równanie różniczkowe, składowa deterministyczna, wielkość losowa

Streszczenie

W pracy przeprowadzono rozważania dotyczące modelowania prognozy procesu losowego odniesione do opisu przemieszczeń punktów zlokalizowanych w obszarze wpływów eksploatacji podziemnej. Prognoza analizowanego procesu niestacjonarnego dotyczy chwili t_{n+1} z restrykcją, że znany jest stan procesu do chwili t_n (wyniki pomiaru) oraz rozwój eksploatacji podziemnej generujący dany proces. Wprowadzono założenie, że badany proces jest złożeniem składowej deterministycznej i wielkości losowej. Proces przemieszczeń pogórnich rozważano jako błędzenie przypadkowe cząstki — łańcuch Markowa — prowadząc do procesu dyfuzji, otrzymując w efekcie równanie różniczkowe cząstkowe.

Dla celów utylitarnych określono przemieszczenia pionowe uwzględniając kilka horyzontów czasowych wykonania pomiarów w okresie kształtowania się niestacjonarnych przemieszczeń. Jakość opisu charakteryzowano błędem średniokwadratowym względem wyników pomiaru dla konkretnej sytuacji górniczo-geologicznej.

Wprowadzenie

Modelowanie charakterystyk ilościowych zjawiska deformacji, zwłaszcza przemieszczeń punktów górotworu w obszarze oddziaływania eksploatacji podziemnej, ma szczególne znaczenie dla praktyki górniczej. Dorobek naukowy dotyczący problematyki badania deformacji górotworu jest pokaźny i obejmuje różne aspekty zagadnienia. Utrwalona w literaturze przedmiotu procedura opisu ilościowego sprowadza się z reguły do wyznaczania charakterystycznych wielkości — tzw. wskaźników deformacji. Opracowano szereg teorii lub formuł empirycznych w tym zakresie.

* Prof. dr hab. inż., Katedra Ochrony Terenów Górniczych AGH, Kraków.

Recenzował prof. dr hab. inż. Jerzy Litwiniszyn

Charakterystykę stanu badań w płaszczyźnie typologicznej podaje S. Knothe (1984), wyróżniając następujące kierunki prac:

- opis przemieszczeń jako odpowiednio zdefiniowane formuły całkowe,
- modele oparte na teorii mechaniki ośrodka ciągłego,
- losowy charakter procesu przemieszczeń — model probabilistyczny.

W niniejszej pracy podjęto próbę opisu kinematyki przemieszczeń pogórnich jako procesu losowego.

1. Motywacja badań

Badania empiryczne wskazują, że szereg parametrów charakteryzujących własności górotworu zmienia się w sposób zróżnicowany, często są to zmiany nieciągłe, co istotnie wpływa na rozkład pola przemieszczeń. Uwzględnienie wszystkich czynników wpływających na przemieszczenie się punktu górotworu w opisie deterministycznym jest niemożliwe, z konieczności więc przyjmuje się wiele uproszczeń. Najczęściej zakłada się, że struktura górotworu jest izotropowa. Gdyby nawet przyjąć, że zjawiskiem deformacji ośrodka wymuszonym eksploatacją podziemną „rządzą” ściśle deterministyczne prawa, i tak musielibyśmy posługiwać się na etapie modelowania metodami statystyki matematycznej czy też fizyki statystycznej.

Przestrzeń deformacji ośrodka w stanie nieustalonym składa się z olbrzymiej liczby cząstek będących względem siebie w ruchu. Gdybyśmy byli w stanie obserwować każdą z nich, to i tak przykładowo informacja o wzajemnym położeniu cząstki m oraz $m+k$ byłaby raczej bezużyteczna. Skądinąd wiadomo, że w mechanice klasycznej ruch cząstki opisuje się podając jej położenie i prędkość w dowolnej chwili n . Można więc *a priori* wyznaczyć ruch ośrodka na podstawie znajomości położenia i prędkości wszystkich cząstek w danej chwili, jeśli potrafimy ustalić ich oddziaływania. Matematycznie ilość równań byłaby tu olbrzymia, zależna od liczby analizowanych cząstek będących w ruchu. Czy rozwiązanie takiej ilości równań w praktyce jest możliwe?

Jednocześnie warunki początkowe dla owych równań byłyby obciążone błędem pomiaru, co istotnie wpływa na ewolucję układu. Zależność ewolucji układu od warunków początkowych ilustruje następujący formalizm. Niech ewolucję układu opisuje równanie różniczkowe (1.1) (Schwartz 1979–1980).

$$X' = f(t, x) \tag{1.1}$$

Zakładamy, że:

- $\Omega \in \text{top}(\mathbb{R} \times \mathbb{R}^n)$ — zbiór otwarty,
- $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ — ciągłe pole wektorowe.

Definiujemy przedział $\Delta \subset \mathbb{R}$. Rozwiązanie równania (1.1) określone jest z definicji na przedziale. Z własności rozwiązania równań różniczkowych (Schwartz 1979–1980) wynika, że:

- X jest rozwiązaniem równania (1.1) $\stackrel{\text{def}}{\Leftrightarrow} \forall t \in \Delta \quad (t, x(t)) \in \Omega$,
- X jest różniczkowalne w Δ ,
- $\forall t \in \Delta \quad X'(t) = f(t, x(t))$

Ponadto, dla rozwiązania (1.1) żądamy dodatkowo, by w punkcie $(t_0, x_0) \in \Omega$ zachodził warunek, że $x(t_0) = x_0$. Uzupełniając (1.1) o warunek początkowy można zapisać:

$$\begin{cases} x' = f(t, x) \\ x(t_0) = x_0 \end{cases} \quad (1.2)$$

Niech $u(t)$ będzie rozwiązaniem (1.2) $\Rightarrow u \Leftrightarrow u: \Delta \mathbb{R}$ jest ciągła z definicji, mamy więc „ \Rightarrow ”

$$\forall t \in \Delta \quad u'(t) - f(t, u(t)) \Rightarrow \forall t \in \Delta \quad \int_{t_0}^t u'(s) ds = \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \Rightarrow \forall t \in \Delta \quad u(t) = x_0 + \int_{t_0}^t f(s, u(s)) ds \quad (1.3)$$

Sprawdzenie warunku początkowego dla (1.2):

$$u(t_0) = \int_{t_0}^{t_0} f(s, u(s)) ds + x_0 = x_0$$

Z reguły analityczne wyznaczenie całki w rozwiązaniu (1.3) przez kwadraturę nie istnieje, stąd też określamy oszacowanie rozwiązania (Schwartz 1979–1980) lub dowód istnienia i jednoznaczności.

Z (1.3) mamy: $u(t) = \int_{t_0}^t x_0 + f(s, u(s)) ds$ i jest rozwiązaniem problemu (1.2), tzn.

$u: (t_0 - \delta, t_0 + \delta) \rightarrow \mathbb{R}^n$ dla $\delta > 0$ to:

$$\exists \tilde{\Delta} \subset \Delta, \cap (t_0 - \delta, t_0 + \delta), \quad \text{że} \quad \forall t \in \tilde{\Delta} \quad v: \Delta \rightarrow \mathbb{R}^n; v(t) = u(t)$$

Z twierdzenia Picarda wynika, że u i v pokrywają się w pewnym otoczeniu:

$$\begin{aligned} t^+ &= \sup \{t; \forall s \in [t_0, t] u(s) = v(s)\} \\ t^- &= \inf \{t; \forall s \in [t, t_0] u(s) = v(s)\} \end{aligned} \quad (1.4)$$

Ciągła zależność rozwiązania warunków początkowych

Zakłada się, że:

$\Omega \in \text{top} \mathbb{R}^n$; $f: \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ spełnia lokalny warunek Lipschitza

$X: [t_0, t_1] \rightarrow \Omega$ rozwiązanie problemu $X' = f(x)$

„ \Rightarrow ”

Rozważmy zbiór: $F = \{x(t); t \in [t_0, t_1]\} \subset \Omega$

$\exists \varepsilon > 0$ takie, że $K \subset \Omega$, gdzie $K = \{x \in \Omega; d(x, F) < \varepsilon\}$

$\exists L > 0$, że f spełnia warunek Lipschitza ze stałą L

$\exists 0 < \delta \leq \varepsilon$, że: $2\delta \cdot e^{L(t_1 - t_0)} < \varepsilon$

$U: \subset K(x_0, \delta)$

Niech $y_0 \in U$ oraz

$y: (\alpha, \beta) \rightarrow \Omega$ i stanowi rozwiązanie wysycone problemu

$$\begin{cases} x' = f(x) \\ x(t_0) = y \end{cases} \quad (**) \quad \begin{aligned} x(t) &= x(t_0) + \int_{t_0}^t f(x(s)) ds \\ y(t) &= y(t_0) + \int_{t_0}^t f(y(s)) ds \end{aligned}$$

Niech $\beta' \in (t_0, \beta)$

Szacujemy odległość

$$\|x(t) - y(t)\| \leq \|x(t_0) - y(t_0)\| \cdot e^{L(t-t_0)} \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad (1.5)$$

Związek (1.5) potwierdza ciągłą zależność rozwiązania równania różniczkowego od warunków początkowych.

Oprócz zależności rozwiązania od warunków początkowych (od dokładności wyznaczenia warunków początkowych) na opis ewolucji układu wpływają nieuniknione błędy numeryczne, a także dokładność wyznaczenia oddziaływań międzycząsteczkowych. Rozwiązanie czysto teoretyczne jest tu praktycznie poza zasięgiem zastosowania.

Fizyka statystyczna, która obecnie rozwija się jako „procesy stochastyczne”, posługuje się modelami procesów losowych. Dla rozważanego procesu z reguły można wyznaczyć rozkłady gęstości interesujących nas wielkości i porównać z wynikami pomiaru. Zgodność wyników pomiaru z wielkościami otrzymanymi teoretycznie stanowi o poprawności rozkładu prawdopodobieństwa, pozwala również modelować dany proces. Należy tu jednak wyraźnie podkreślić, że dla eksperymentu pomiarowego korzystamy ze średnich względem czasu. Z tych też względów na etapie modelowania procesów fizykalnych interesujące są głównie różne wielkości średnie (Howard 1970).

2. Charakterystyka procesu przemieszczeń pogórnicznych

Opisu zmian określonej wielkości ośrodka fizycznego najczęściej dokonuje się korzystając z równań fizyki matematycznej, przy czym z reguły nie wnika się w wewnętrzną budowę ośrodka oraz pomija się mechanizmy procesów molekularnych układu. W niniejszej pracy strukturę modelowania procesu przemieszczeń stanowić będzie tzw. opis zewnętrzny, w którym podstawą opisu będą zbiory i relacje tzn.:

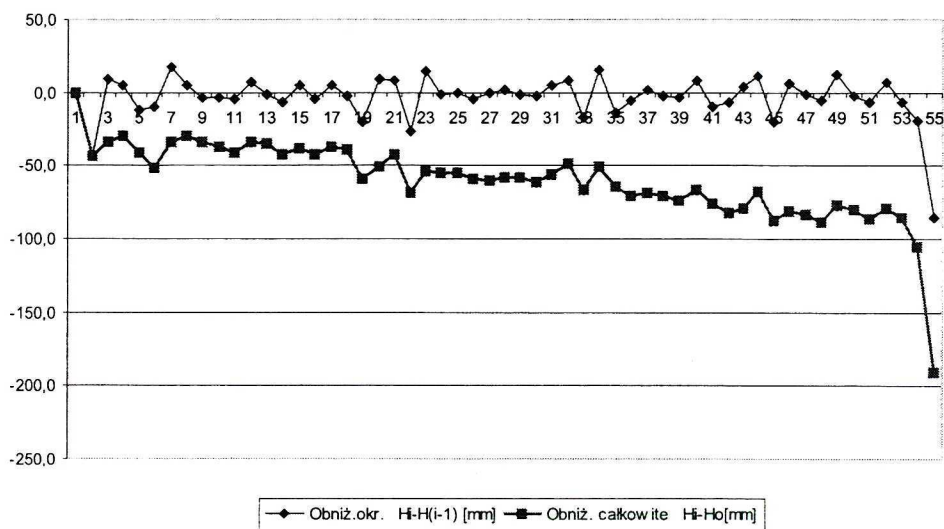
— liniowo uporządkowany zbiór chwil czasu $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, dla których znane są wartości charakteryzujące ilościowo dany proces,

— wyspecyfikowane atrybuty analizowanego procesu i funkcje charakteryzujące proces.

Przedmiotem rozważań jest więc modelowanie realnego procesu niestacjonarnego dla chwili t_{n+1} z uwzględnieniem restrykcji, że znany jest aktualny stan procesu do chwili t_n oraz można

przyporządkować określone oddziaływania zewnętrzne. Opis formalny oraz weryfikacja modelu odniesione zostaną do wyznaczania prognozy pogórnich przemieszczeń pionowych wywołanych eksploatacją podziemną. Fizyka zjawiska wykazuje, że pod wpływem działania naprężeń powstałych w wyniku oddziaływania robót podziemnych na górotwór (otoczenie wyrobiska górniczego) w przestrzeni ośrodka powstają obszary przemieszczania się masy w kierunku zaistniałej pustki poeksploatacyjnej (Knothe 1984; Litwiniszyn 1956; Piwowarski 1999; Smolarski 1966). Modelowanie nieustalonego procesu przemieszczeń stanowiło przedmiot analiz wielu prac — (przykładowo Knothe 1953; Piwowarski 1999). W sensie utylitarnym prognozowanie kinematyki przemieszczeń pogórnich ośrodka jest szczególnie istotnym zagadnieniem ze względu na niekorzystny wpływ deformacji górotworu na infrastrukturę powierzchni i obiekty podziemne. Jest to ważki pod względem utylitarnym problem. Równania procesów losowych dla opisu asymptotycznego stanu deformacji górotworu przedstawił J. Litwiniszyn (1956), problem ten rozwijali również inni badacze (Smolarski 1966). Natomiast w zakresie modelowania stanów niestacjonarnych brak w literaturze pełniejszych sformułowań — stąd też podjęto próbę opisu procesu stochastycznego.

Trajektorie obniżania się punktu nr 4



Rys. 1. Wykres przemieszczeń pogórnich $W(x, t)$ [mm]; punkt nr 4

Fig. 1. Description of post-mining dislocations $W(x, t)$ [mm]; point # 4

Metody probabilistyczne umożliwiają potraktowanie procesu zaburzonego oddziaływaniami losowymi jako zjawiska masowego w całym przedziale czasu jego trwania. W niniejszej pracy skorzystano z wyników pomiaru oraz ze spostrzeżenia J. Litwiniszyna* (1956), że górotwór w obszarze wpływów eksploatacji jest silnie niejednorodny. Litwiniszyn w swoich rozważa-

* Pomiary obniżenia punktu powierzchni wykonane w technologii GPS — trajektorię obniżania się punktu nr 4 ilustruje rysunek 1 — przeprowadzono w Zakładzie Geodezji Górniczej AGH.

niach założył, że ruch punktu fizycznego górotworu jest wynikiem oddziaływania wielu wzajemnie niezależnych czynników losowych, w rezultacie zjawisko przemieszczeń punktów ośrodka potraktował jako proces losowy.

Jak już zaznaczono, struktura warstw górotworu usytuowanych bezpośrednio nad eksploatowanym pokładem stanowi najczęściej „zbiór” elementów skalnych powstały ze zniszczenia makrociągłości ośrodka. Podczas ruchu sąsiadujące ze sobą elementy przemieszczają się losowo, ponieważ brak niezmienności punktów styku. Model stochastyczny wydaje się dobrym przybliżeniem opisu przemieszczeń górotworu w obszarze wpływów eksploatacji podziemnej. Stąd też podjęcie tej problematyki.

Charakterystyki pogórnich przemieszczeń pionowych punktów obserwacyjnych stanowią empiryczne potwierdzenie, że przemieszczenia pogórnice są złożeniem wielkości deterministycznej i składnika losowego. Pojawia się tu problem, że wyspecyfikowana wielkość losowa (właściwie wyniki pomiaru) obciążone są przypadkowym, lecz nieuniknionym błędem pomiaru, przy czym nie znamy rozkładu zaistniałego błędu. W pracy przyjęto, że dla przemieszczeń pionowych błąd średni pomiaru obniżeń w technologii GPS wynosi $m_w = \pm 6$ mm. Najbardziej elementarna filtracja błędu (wstęga wahań) potwierdza pewien dotychczas nie uwzględniany fakt, że trajektorie pogórnich ruchów punktów wykazują wahania.

Dalsza część pracy dotyczyć będzie modelowania analizowanego procesu na bazie modelu probabilistycznego.

3. Proces Markowa jako model błędzenia cząstki

3.1. Błądzenie przypadkowe

Przeliczalny ciąg wielkości ξ możemy modelować tzw. łańcuchami Markowa (Dawidowicz; Howard 1970; Papoulis 1972; Rosenblatt 1967).

Z definicji ciąg zmiennych losowych $\{\xi_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ o wartościach w ustalonym zbiorze $I \subset \mathbb{N}$ nazywamy łańcuchem Markowa, jeżeli spełnione są następujące własności:

$$\forall_{n \in \mathbb{N}} \forall_{k \leq n} \forall_{i_0, i_1, \dots, i_k \in I} \text{ zachodzi warunek} \quad (a)$$

$$P(\xi_n = i_0 | \xi_{n-1} = \xi_1, \dots, \xi_{n-k} = i_k) = P(\xi_n = i_0 | \xi_{n-1} = i_1) \quad (3.1)$$

$P(\xi_i)$ — prawdopodobieństwo

Błądzenie przypadkowe wzdłuż półprostej całkowitoliczbowej



Rys. 2. Schemat losowego przemieszczania się punktu

Fig. 2. Diagram of random dislocations point

Prawdopodobieństwo błędzenia cząstki:

$$\begin{aligned} P(\xi_1 = i_1, \dots, \xi_n = i_n) &= P(\xi_n = i_n | \xi_{n-1} = i_{n-1}, \dots, \xi_1 = i_1) \cdot \\ &\cdot P(\xi_{n-1} = i_{n-1} | \xi_{n-2} = i_{n-2}, \dots, \xi_1 = i_1) \cdot \dots \cdot P(\xi_1 = i_1) = \\ &= P(\xi_n = i_n | \xi_{n-1} = i_{n-1}) \cdot \dots \cdot P(\xi_2 = i_2 | \xi_1 = i_1) \cdot P(\xi_1 = i_1) \end{aligned} \quad (3.2)$$

Oznaczając, że:

$$p_{ij}^{(n)} = P(\xi_n = j | \xi_{n-1} = i) \quad (3.3)$$

wówczas macierz (3.4)

$$\left[p_{ij}^{(n)} \right]_{\substack{i,j \in I \\ n \in \mathbb{N}}} \quad (3.4)$$

jest macierzą stochastyczną dla przejścia ze stanu początkowego do końcowego w n -krokach.

Jeżeli

$$p_{ij}^{(n)} \geq 0 \quad \text{i} \quad \sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = 1 \quad (b)$$

warunek (b) jest zdaniem pewnym, co wynika z (3.5).

$$\sum_{j \in I} p_{ij}^{(n)} = \sum_{j \in I} P(\xi_n = j | \xi_{n-1} = i) = P(\xi_n \in I | \xi_{n-1} = i) = 1 \quad (3.5)$$

Jeżeli prawdopodobieństwo przejścia układu z jednego stanu do drugiego nie zależy od n , to taki ciąg zmiennych losowych określa się jako łańcuch Markowa jednorodny. Wyróżnić można następujące stany układu:

Stan nieistotny E_i :

$$\exists E_j \wedge \exists n_0 > 0, \text{ że } p_{ij}(n_0) > 0 \quad \forall m \geq 0; \quad p_{ij}(n) = 0 \quad (3.6)$$

Stan istotny E_i :

$$\forall j p_{ij}(n) > 0 \Rightarrow \exists m : p_{ij}(m) > 0 \quad (3.7)$$

Stany $E_i \wedge E_j$ komunikują się (dowolne przejście) jeżeli:

$$\exists_{m,n} > 0 : p_{ij}(m) > 0 \quad \text{i} \quad p_{ij}(n) > 0 \quad (3.8)$$

Prawdopodobieństwo powrotu do stanu pierwotnego

Niech $f_j(n)$ zadane będzie następująco:

$$f_j(n) = P(\xi_n = j, \xi_{n-j} \neq j, \dots, \xi_{j+1} \neq j | \xi_0 = j) \quad (3.9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) \leq 1$$

Stan procesu nazywamy powracającym (Dawidowicz 1998), jeżeli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) = 1 \quad (3.10)$$

Stan procesu określamy jako niepowracający (Dawidowicz 1998), jeżeli:

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) < 1 \quad (3.11)$$

Kryteria (3.10) i (3.11) zapisane zostaną przez macierz przejścia:

$$P_{ij}(n) = \sum_{k=1}^n f_j(k) \cdot p_{ij}(n-k) \quad (3.12)$$

Niech:

$$F_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} f_j(n) \cdot x^n \quad (3.13)$$

$$P_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_j(n) \cdot x^n$$

$$P_j(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p_j(n) \cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{k=1}^n f_j(n-k) \cdot x^k \cdot p_j(n-k) \cdot x^{n-k} + 1 = \quad (3.14)$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{n=k}^{\infty} f_j(k) \cdot x^k \cdot p_j(n-k) \cdot x^{n-k} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{\infty} f_j(k) \cdot x^k \cdot \sum_{n=k}^{\infty} p_j(n-k) \cdot x^{n-k} = 1 + P_j(x) \cdot F_j(x)$$

$$P_j(x) = 1 + P_j(x) \cdot F_j(x) \quad (3.15)$$

$$P_j(x) = \frac{1}{1 - F_j(x)}; \quad F_j(x) = \frac{P_j(x) - 1}{P_j(x)} = 1 - \frac{1}{P_j(x)}$$

$$\text{Jeżeli } F_j(1) < 1 \text{ stan niepowracający} \quad (3.16)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_{ij}(n) = \infty \text{ stan powracający} \quad (3.17)$$

3.2. Błądzenie przypadkowe jako proces dyfuzji

Niech $u_{ij}^{(n)}(x)$ oznacza, że cząstka w n -tym kroku zajmie na prostej położenie x . Przyjmując, że:

i — liczba przejść (kroków) na lewo od punktu startowego (zerowego),

j — liczba przejść na prawo od punktu startowego: $j = n - i$.

Stąd łączne przemieszczenie cząstki x wynosi:

$$x = j - i = n - 2i \quad (3.18)$$

Zatem:

$$u_{ij}^{(n)}(x) = \binom{n}{(n+x)/2} \cdot p^{(n+x)/2} \cdot q^{(n-x)/2} \quad (3.19)$$

Zależność (3.19) (Dawidowicz 1999) spełnia również równanie różnicowe:

$$u_{ij}^{(n+1)}(x) = p \cdot u_{ij}^{(n)}(x-1) + q \cdot u_{ij}^{(n)}(x+1) \quad (3.20)$$

z warunkami brzegowymi:

$$u^{(0)}(0) = 1 \quad u^{(0)}(x) = 0 \quad \text{dla } x \neq 0 \quad (3.21)$$

Przyjmując, że:

Δx — długość każdego kroku,

Δt — czas pomiędzy kolejnymi przejściami.

Wówczas cząstka w czasie t dozna $n = t/\Delta t$ przejść, zaś przemieszczenie wyznaczają powyższe zależności. Przemieszczenia i czas podczas błądzenia muszą być związane ze sobą w odpowiedni sposób, tak by w granicy proces nie uległ degeneracji (wariancje zmierzałyby do 0 lub ∞). Z założeń wynika, że w czasie t przemieszczenie jest sumą około $t/\Delta t$ wzajemnie niezależnych zmiennych losowych o wartości oczekiwanej: $(p - q)\Delta t$ i wariancji:

$$[1 - (p - q)^2](\Delta x)^2 = 4pq(\Delta x)^2.$$

Wartość oczekiwana łącznego przemieszczenia wynosić będzie:

$$E(x) \approx t(p - q) \cdot \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (3.22)$$

Wariancja łącznego przemieszczenia wyraża się zależnością:

$$t\ell^2(x) \approx 4pq(\Delta x)^2 / \Delta t \quad (3.23)$$

Zmierzając do zera z Δx i Δt , $E(x)$ i $t\ell^2$ muszą być skończone dla wszystkich t . Skończoność wartości oczekiwanej wymaga, by:

$$(p-q) \sim \Delta t \quad (3.24)$$

Skończoność wariancji implikuje uwarunkowanie:

$$(\Delta x)^2 / \Delta t \sim \text{ograniczone} \quad (3.25)$$

Przyjmując, że:

$$\frac{(\Delta x)^2}{\Delta t} = 2D; \quad p = \frac{1}{2} + \frac{c}{2D} \cdot \Delta x; \quad q = \frac{1}{2} - \frac{c}{2D} \cdot \Delta x \quad (3.26)$$

dla ustalonego Δx i całkowitego przemieszczenia cząstki błądzącej jego wartość oczekiwana wyraża się zależnością:

$$E(x) = t(p-q) \cdot \Delta x / \Delta t \quad (3.27)$$

Uwzględniając (3.26) otrzymamy:

$$E(x) = 2c \cdot t \quad (3.28)$$

Wariancja sumy skończonej ilości niezależnych przemieszczeń cząstki wynosi:

$$\ell^2(x) = 4pqt(\Delta x)^2 / \Delta t \quad (3.29)$$

Po uwzględnieniu (3.26) mamy:

$$\ell^2(x) = 2Dt \quad (3.30)$$

Równanie różnicowe (3.20) dla chwili $T = t + \Delta t$ można przedstawić w postaci:

$$u(x, t + \Delta t) = p \cdot u(x - \Delta x, t) + q \cdot u(x + \Delta x, t) \quad (3.31)$$

Rozwijając w szereg Taylora powyższą zależność do wyrazów drugiego rzędu włącznie otrzymujemy:

$$\Delta t \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = (q-p) \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial x} + \frac{(\Delta x)^2}{2} \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + \dots \quad (3.32)$$

Korzystając z poprzednich podstawień, w granicy równanie przyjmie postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} = -2c \cdot \frac{\partial u(x, t)}{\partial u} + D \cdot \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \\ u(x, t) = 0 \quad \forall x, \\ u(x, t) = 0 \quad \text{dla } x \in \partial\Omega \text{ (na brzegu)} \\ \int_{\Omega \wedge (t)} u(x; t) dx = A \cdot \Lambda(t) \end{array} \right. \quad (3.33)$$

gdzie:

A — objętość pustki poeksploatacyjnej,

$\Lambda(t)$ — parametr tłumienia dyfundującej pustki.

Jest to równanie Fokkera–Plancka dla dyfuzji.

Równanie dyfuzji przystosowano do rozwiązania numerycznego (Białas, Olajossy 1987) — schemat jawny pięćpunktowy. Wprawdzie procedura rozwiązania równania różniczkowego jest tu typowa, pojawiają się jednak dodatkowe problemy, ponieważ obszar całkowania w kolejnych chwilach powiększa się — ze względu na rozwój pola eksploatacji i zwiększanie się przestrzeni deformacji.

3.3. Próba adaptacji równania dyfuzji do opisu przemieszczeń pogórnich

Modelowanie dotyczy rozkładu przemieszczeń pionowych pod wpływem eksploatacji pokładu 207.

$$H_{sr} = 520 \text{ m};$$

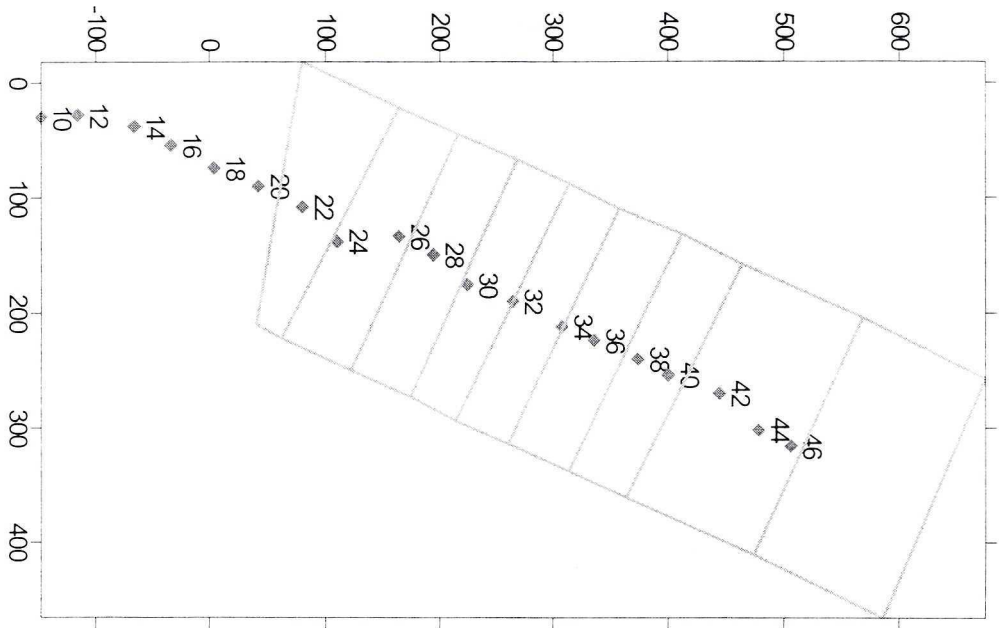
$$g_{sr} = 2.2 \text{ m};$$

$$v_{eksp.} = 2.5 \text{ m/dobę}; \text{ zawał.}$$

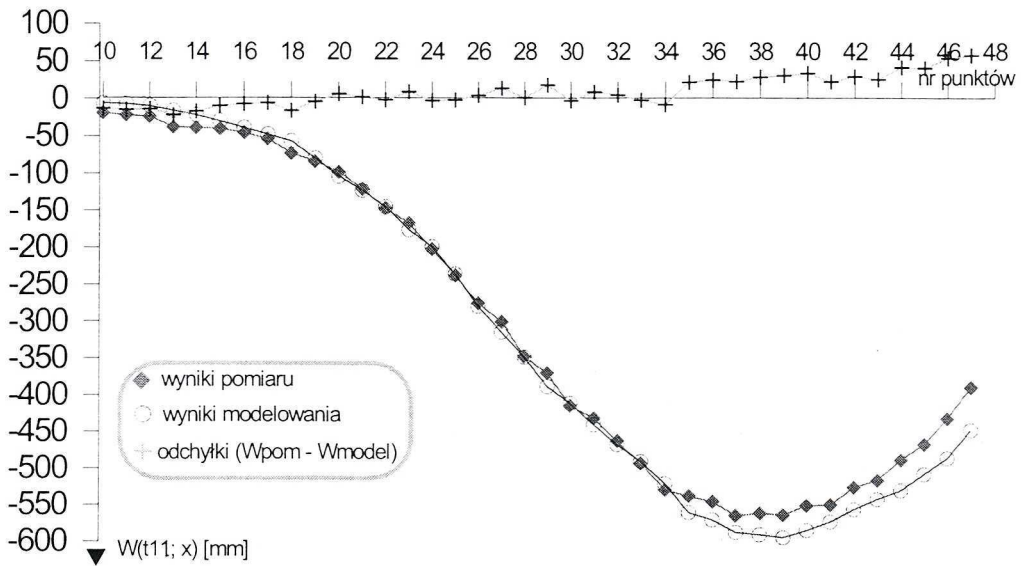
Struktura ewolucyjnego zagadnienia w postaci (3.33) powoduje, że nie istnieją efektywne metody wyznaczania rozwiązania $u(x, t)$. Wybrane przykłady testowania rozwiązania problemu (3.33) obejmują stosunkowo prosty schemat pola górniczego (z grubsza prostokąt) — co istotnie upraszcza pokrycie hipotetycznego obszaru Ω siatką „komórek” i zastosowanie schematu różnicowego numerycznego całkowania równania.

Wyniki modelowania dotyczą pomiaru obniżeń odpowiednio podczas sesji pomiarowej nr 11 oraz nr 12. Szkic rozwoju eksploatacji podziemnej zgodnie z datą pomiaru nr 11 przedstawiono na rysunku 3, a dla pomiaru nr 12 schemat pola górniczego zamieszczono na rysunku 5.

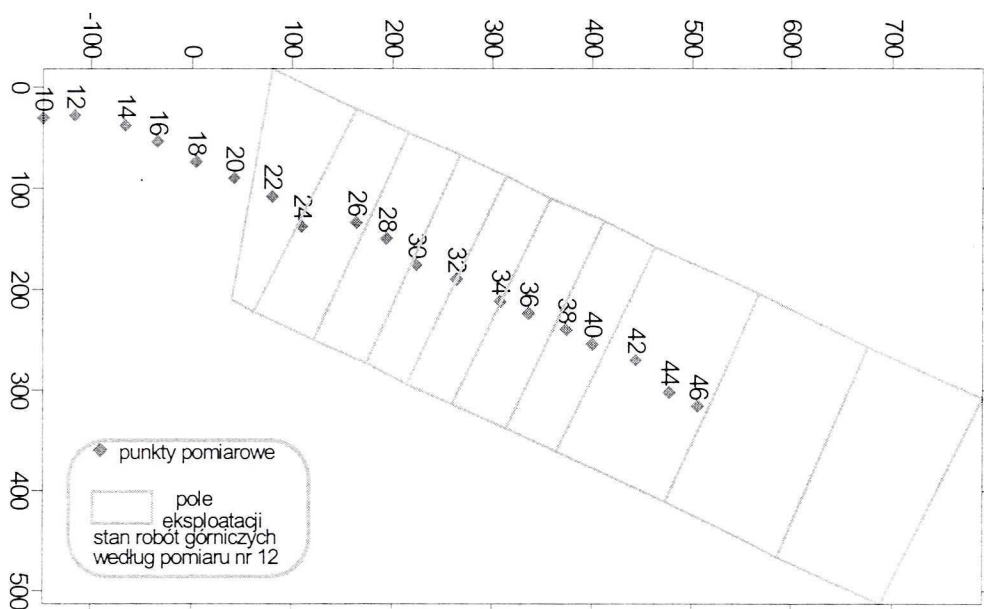
Jak już zaznaczono, całkowanie równania (3.33) prowadzi się w obszarze $\Omega = \Omega(x, t)$. Obszar ten symulowano (rozszerzając $\Omega(\cdot, t)$ poza obrys pola eksploatacji) tak, by uzyskać jakoś-



Rys. 3. Schemat rozwoju pola górniczego — według daty pomiaru nr 11
 Fig. 3. Underground exploitation development scheme at measurement # 11

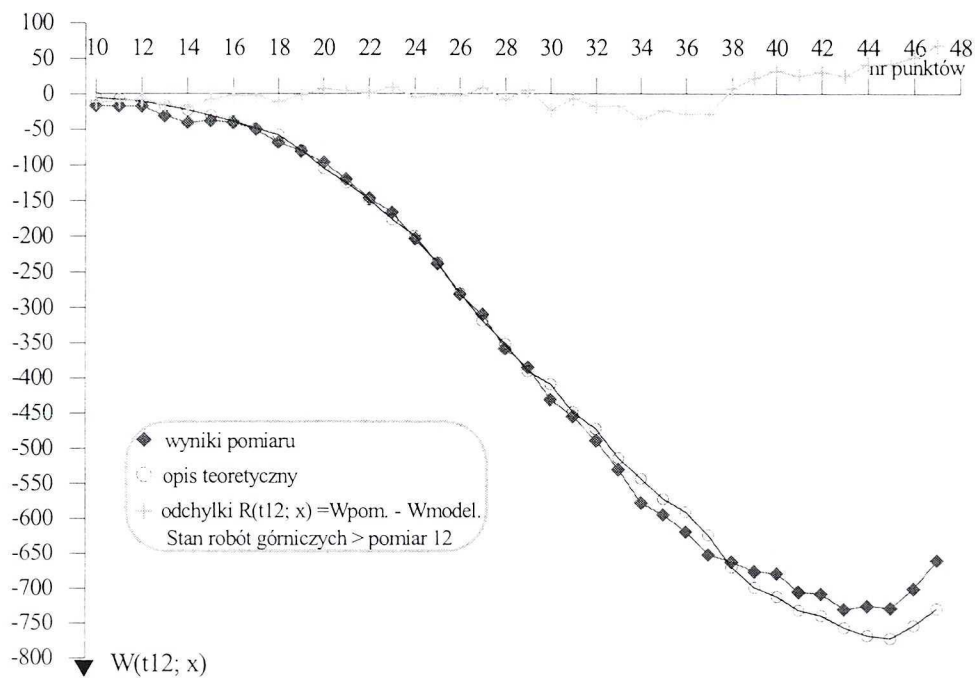


Rys. 4. Wykresy przemieszczeń pionowych $W(t_{11}; x)$; pomiar nr 11
 Fig. 4. Description of dislocations vertical $W(t_{11}; x)$ at measurement # 11



Rys. 5. Schemat rozwoju eksploatacji podziemnej według daty pomiaru nr 12

Fig. 5. Underground exploitation development scheme at measurement # 12



Rys. 6. Wykresy przemieszczeń pionowych $W(t_{12}; x)$ według pomiaru nr 12

Fig. 6. Description of dislocations vertical $W(t_{12}; x)$ at measurement # 12

Wyniki pomiaru i modelowania obniżen punktów powierzchni $W(x; t)$ The results of survey and modelling of the subsidences of surface points $W(x; t)$

Nr p-ktu	Pomiar nr 11			Pomiar nr 12		
	W_{pom} [mm]	W_{mod}^* [mm]	Odchylenie $R = W_{pom} - W_{mod}$	W_{pom} [mm]	W_{mod}^* [mm]	Odchylenie $R = W_{pom} - W_{mod}$
10	-19	-6	-13	-16	-5	-11
11	-22	-7	-15	-17	-7	-10
12	-24	-10	-14	-17	-10	-7
13	-38	-16	-22	-30	-16	-14
14	-39	-22	-17	-40	-22	-18
15	-40	-30	-10	-37	-30	-7
16	-46	-39	-7	-40	-38	-2
17	-54	-48	-6	-50	-48	-2
18	-73	-57	-16	-68	-57	-11
19	-84	-80	-4	-80	-79	-1
20	-98	104	4	-96	-104	8
21	-121	-123	2	-116	-124	5
22	-147	-145	-2	-146	-148	2
23	-167	-176	9	-166	-176	10
24	-202	-199	-3	-203	-199	-4
25	-238	-236	-2	-238	-236	-2
26	-276	-280	4	-281	-279	-2
27	-301	-315	14	-309	318	9
28	-348	-349	1	-358	-351	-7
29	-371	-389	18	-384	-390	6
30	-415	-412	-3	-430	-408	-22
31	-432	-441	9	-454	-448	-6
32	-463	-468	5	-489	-472	-17
33	-493	-491	-2	-530	-514	-16
34	-529	-521	-8	-578	-543	-35
35	-538	-560	22	-595	-572	-23
36	-545	-570	25	-619	-591	-28
37	-564	-587	23	-652	-624	-28
38	-561	-590	29	-662	-670	8
39	-563	-594	31	-676	-699	23
40	-550	-584	34	-679	-712	33
41	-549	-572	23	-705	-731	26
42	-525	-555	30	-708	-739	31
43	-515	-541	26	-730	-756	26
44	-487	-529	42	-725	-767	42
45	-466	-507	41	-728	-771	43
46	-431	-485	54	-701	-753	52
47	-389	-447	58	-660	-729	69
Błąd średni m_w	$m_w = 22,7$			$m_w = 23,9$		

* Pomiary geodezyjne wykonali pracownicy i dyplomanci Katedry Ochrony Terenów Górniczych AGH.

ciowo zgodność w sensie fizykalnym oraz optymalne przybliżenie ilościowe do wyników pomiaru przemieszczeń pionowych punktów linii obserwacyjnej.

Podsumowanie

Wyniki pomiarów geodezyjnych kształtowania się powierzchniowych niecek obniżeniowych w rejonach wpływów eksploatacji podziemnej wskazują, że rozkład obniżeń wzdłuż linii obserwacyjnych wykazuje asymetrię. Profil niecki w otoczeniu „stałej” krawędzi pola górniczego wykazuje dłuższy zasięg w kierunku calizny niż w otoczeniu krawędzi „ruchomej” pola, i to zarówno dla stanu asymptotycznego, jak i dla stanu niestacjonarnego. Również pochylenie profilu niecki (moduł) jest większe od strony krawędzi stałej.

Trajektorie obniżania się punktów obserwacyjnych wyznaczone na podstawie cyklicznych pomiarów wykazują wahania dotyczące zarówno sumarycznych wartości obniżeń $W(t_i)$, jak i przyrostów ($\Delta W(t_i)$) dla każdego z obserwowanych punktów. Nieregularność wyznaczonej empirycznie trajektorii (pomiar) wynika z nałożenia się błędu pomiarowego oraz losowości procesu.

Stosowane teorie opisu asymptotyki procesu oraz modelowania niestacjonarnych charakterystyk przemieszczeń pogórnich z natury nie uwzględniają asymetrii profilu niecki i wahań trajektorii.

W pracy przedstawiono rozważania dotyczące zbudowania modelu probabilistycznego odnośnie do opisu obniżeń. Przeprowadzona analiza nieustalonego procesu przemieszczeń pogórnich wskazuje, że formalnie można przyjąć, że jest to dyfuzyjny proces stochastyczny. Korzystając tu z odpowiednich sformułowań dla procesów dyfuzyjnych podano równania pozwalające opisać sformułowany problem.

W zakresie aplikacji wyznaczono rozkład przemieszczeń pionowych w $R^1 \times R^1$, jest to rozwiązanie sprowadzone do prostego schematu — co wynika głównie ze złożoności merytorycznej problemu. Zagadnienie modelowania procesów losowych jest bardzo trudne, wymagające wielu analiz i nawet w ograniczonym zakresie może stanowić przedmiot rozważań dla odrębnego projektu badawczego. Niemniej, w ramach niniejszej pracy zanalizowano pewien zakres problemów teoretycznych z dziedziny procesów stochastycznych. Należy zaznaczyć, że silny rozwój warstwy formalnej problemu (matematycznej) znacznie wyprzedza zastosowania inżynierskie.

Podjęta w ramach badań własnych próba zbudowania modelu stochastycznego do opisu procesu przemieszczeń pogórnich stanowi oryginalne cząstkowe rozwiązanie problemu.

LITERATURA

- Białas S., Olajossy A., 1987 — Różnicowe metody rozwiązywania równań różniczkowych. Część II. Równania różniczkowe cząstkowe. Wyd. AGH, Kraków.
- Davidowicz A. L. — Seminarium w zakresie statystyki matematycznej. Instytut Matematyczny PAN, Oddział w Krakowie.
- Howard R. A., 1970 — Programowanie dynamiczne i procesy Markowa. Warszawa, wersja oryginalna: Dynamic Programming and Markov Processes. M.I.T., Technology, Press 1960.

- Knothe S., 1984 — Prognozowanie wpływów eksploatacji górniczej. Wyd. Śląsk, Katowice.
- Knothe S., 1953 — Wpływ czasu na kształtowanie się niecki osiadania. Arch. Gór. i Hut. t. 1, z. 1, Warszawa.
- Litwiniszyn J., 1956 — Zastosowanie równań procesów stochastycznych do mechaniki górotworu. Arch. Gór. i Hut. t. 1, z. 3, Warszawa.
- Papoulis A., 1972 — Prawdopodobieństwo, zmienne losowe i procesy stochastyczne. PWN, Warszawa.
- Piwowski W., 1999 — Model prognozy niestacjonarnego procesu odniesiony do opisu przemieszczeń pogórnich zidentyfikowany pomiarami geodezyjnymi (w druku).
- Rosenblatt M., 1967 — Procesy stochastyczne. PWN, Warszawa.
- Schwartz L., 1979—1980 — Kurs analizy matematycznej. Tom 1, 2. Warszawa (tł. z franc.).
- Smolarski A. Z., 1966 — O niektórych zastosowaniach liniowych modeli matematycznych do mechaniki górotworu. Instytut Mechaniki Górotworu PAN, Kraków.
- WOLFRAM: Pakiet MATHEMATICA 1999 r.

PIWOWARSKI WIESLAW

RELATIONAL MODEL — SURVEY RESULTS AS RELATED TO QUANTITATIVE DESCRIPTION OF RANDOM PROCESS

Key words

Underground working, chain Markov, surveys, nonstationary process, post-mining dislocations, differentials equations, determinate components, random quantity

Abstract

The paper presents a relational model of random process prognosis related to the description of ground points dislocations within the area of underground exploitation influence. The prognosis of the analysed nonstationary process refers to the moment t_{n+1} with the restriction, that both the process state until moment t_n (survey results) as well as underground exploitation development generating given process are known. Moreover, an assumption has been introduced, that the investigated process is a composition of deterministic component and of random quantity. The process of post-mining dislocations has been analysed as random walk of rockmass particle — Markov chain — leading to diffusion process. In result partial differential equation has been obtained.

What has been carried out for utilitarian purposes is the optimization of presented model with regard to several temporal horizons of surveying within the period of nonstationary dislocations formation. The quality of the description has been characterised by mean square error in relation to dislocations survey results the actual mining — geological situation