

BADANIA NAD WŁAŚCIWOŚCIAMI OPERACYJNYMI METODY AHP

ANNA PRUSAK

Uniwersytet Ekonomiczny w Krakowie
Katedra Zarządzania Jakością

PIOTR STEFANÓW

Krakowska Akademia im A.F. Modrzewskiego
Katedra Metod Statystycznych
e-mail: piotr@stefanow.net

ABSTRACT

An ability to generate consistent results is the most critical operational feature of every method. The objective of the present paper was to demonstrate the results of the study conducted within the Ministry of Science and Higher Education Grant NN111345138 (*Methodology of multicriteria comparative analysis of elements*), regarding the relationship between the level of inconsistency of the AHP results, measured by Consistency Ratio (CR), and number of the compared criteria. Experiment involved analysis of 3-8 characteristics of selected objects (laptop, printer, public transport, mobile phone, flat and food store). The results showed that the analysis of as few as 3 characteristics resulted in a very high fraction of inconsistent opinions (more than 50%). In case of 6,7 and 8 characteristics this fraction exceeded 80%.

KEY WORDS — SŁOWA KLUCZOWE

analytic hierarchy process (AHP), analytic network process (ANP), consistency ratio (CR),
Multiple criteria decision analysis

analityczny proces hierarchiczny (AHP), analityczny proces sieciowy (ANP),
zgodność wyników (CR), wielowymiarowa analiza porównawcza (WAP)

1. WPROWADZENIE

Metoda Analitycznego Procesu Hierarchicznego (AHP — *Analytic Hierarchy Process*) oraz Analitycznego Procesu Sieciowego (ANP — *Analytic Network Process*) to jedne z najpopularniejszych na świecie wielokryterialnych narzędzi wspomagających podejmowanie decyzji. Zostały one zaproponowane w latach 70 XX w.

przez amerykańskiego matematyka, T.L. Saaty'ego. U podstaw metody AHP leży założenie, że większość złożonych problemów decyzyjnych można rozłożyć na czynniki pierwsze i przedstawić w postaci drzewa hierarchicznego (struktury hierarchicznej). Struktura hierarchiczna podlega następnie analizie poprzez dokonanie porównań parami poszczególnych jej elementów oraz obliczeniu odpowiednich współczynników wagowych. W ten sposób metoda AHP porządkuje warianty decyzyjne od optymalnego do najmniej pożądanego, tym samym ułatwiając podjęcie decyzji co do wyboru któregoś z nich. Poszczególne etapy tej metody zostały w sposób syntetyczny omówione w dalszej części pracy.

Problem decyzyjny nie zawsze można zaprezentować w postaci drzewa hierarchicznego, które nie uwzględnia pewnych złożonych relacji, jak np. sprzężenia zwrotnego pomiędzy poszczególnymi elementami. Dlatego też zostało opracowane inne narzędzie — ANP, które stanowi rozszerzenie metody AHP, uwzględniające różnego rodzaju powiązania pomiędzy oraz wewnątrz poszczególnych grup kryteriów i subkryteriów. Metoda ANP nie jest przedmiotem rozważań niniejszego artykułu, ale należy podkreślić, że analiza danych w przypadku obydwu metod oparta jest na tej samej, uniwersalnej procedurze postępowania, polegającej na dokonywaniu porównań parami między sobą wszystkich elementów modelu przy użyciu fundamentalnej skali Saaty'ego. Procedury te generują jednak szereg problemów, zarówno na poziomie budowy modelu jak i analizy, które w praktyce prowadzą do niskiej wiarygodności wyników. Są to m.in. nadmierne uproszczenie rzeczywistości w modelu hierarchicznym, agregacja wyników AHP w grupowym podejmowaniu decyzji, zmiana wyników na skutek pojawienia się dodatkowego elementu w modelu oraz trudność w uzyskaniu spójnych (zgodnych) wyników. Przykłady wybranych problemów zostały omówione np. w [Stefanów & Prusak 2011].

Problem dotyczący trudności w uzyskaniu zgodnych (spójnych) wyników, szczególnie gdy dokonywana jest duża liczba porównań, jest najpoważniejszym zarzutem wobec AHP/ANP. Tymczasem zdolność do generowania niesprzecznych wyników jest krytyczną właściwością operacyjną każdej metody. Dostrzegając ten problem, twórca narzędzi AHP/ANP zaproponował specjalny wskaźnik zgodności (współczynnik *CR* — *Consistency Ratio*), za pomocą którego na każdym etapie analizy kontrolowana jest spójność (zgodność) otrzymanych rezultatów. Jeśli są one niespójne, badanie należy powtórzyć bądź odrzucić. Nasuwa się w związku z tym pytanie, jak często takie niezgodności się zdarzają i od czego zależą. Wyniki badań przedstawione w niniejszym artykule, prowadzone w ramach Grantu MNiSW NN111345138: *Metodologia wielokryterialnej analizy porównawczej obiektów*, są jedną z nielicznych prób udzielenia odpowiedzi na to pytanie. Istnieje bowiem bardzo wiele publikacji dotyczących tego problemu, ale większość z nich próbuje rozwiązać go od strony analitycznej. Nie są znane autorom żadne próby badania od strony empirycznej poziomu niezgodności wyników AHP w zależności od takich czynników jak np. sposób prezentacji danych

i administrowania ankiety, liczba porównywanych elementów oraz liczba stopni na skali porównań¹.

Prowadzenie badań dotyczących kluczowych właściwości operacyjnych AHP/ANP jest szczególnie ważne ze względu na rosnącą w świecie popularność tych metod, zarówno w nauce, jak i w praktyce. Mimo, iż mają one wielu krytyków, którzy zwracają uwagę na ich poważne niedociągnięcia, to w bazach czasopism wysokopunktowanych można znaleźć ogromną liczbę artykułów na temat aplikacji AHP/ANP w różnych obszarach. Żadna inna wielokryterialna metoda wspomagająca decyzje (np. VDA, Electre, Promethe) nie doczekała się takiej liczby publikacji. Po metody AHP/ANP coraz częściej sięgają też praktycy. Duża popularność AHP/ANP w porównaniu do innych wielokryterialnych metod podejmowania decyzji wynika m.in. z tego, że metody te pozwalają w prosty sposób zdekomponować złożony problem decyzyjny i zanalizować go, w wyniku czego otrzymuje się konkretne wyniki liczbowe wskazujące optymalny wariant decyzyjny. Ponadto, posiadają one łatwo dostępne dla użytkownika oprogramowanie komputerów². Duża liczba zastosowań wymaga zwrócenia szerszej uwagi na wiarygodność obliczeń, które mogą mieć potem wpływ na realne decyzje.

Celem niniejszego artykułu jest przedstawienie rezultatów badań dotyczących zależności pomiędzy poziomem niezgodności wyników AHP, mierzonym za pomocą powszechnie stosowanego współczynnika *CR*, a liczbą porównywanych elementów. Dokonano tego za pomocą eksperymentu, obejmującego analizę od 5 do 8 właściwości różnych obiektów. Przedstawiono również cząstkowe badania dotyczące 3 kryteriów.

W pierwszej części pracy krótko przedstawiono zasady działania metody AHP. Druga część artykułu koncentruje się na prezentacji uproszczonej metody szacowania współczynnika zgodności porównań *CR*. Kolejna część pracy stanowi syntetyczny przegląd światowej literatury dotyczącej AHP/ANP, ze szczególnym naciskiem na metodologiczne aspekty tych metod. Pracę kończy opis, omówienie wyników eksperymentu oraz wnioski i implikacje dla przyszłych badań.

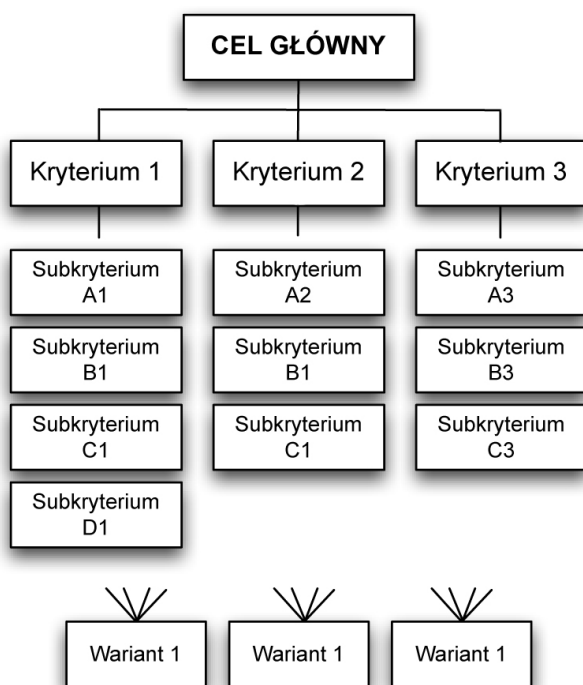
2. ZASADY DZIAŁANIA METODY AHP

Etapy analizy AHP oraz ich podstawy matematyczne można znaleźć praktycznie w każdym podręczniku i artykule T. Saaty'ego oraz każdej publikacji dotyczącej metod AHP/ANP. Wiele z nich odwołuje się także do tzw. 7 filarów AHP [Saaty

¹ Wpływ tych czynników na zgodność wyników AHP uzyskanych na podstawie porównań dokonywanych na skali wielostopniowej stanowi przedmiot badań ww. grantu MNiSW NN111345138: *Metodologia wielokryterialnej analizy porównawczej obiektów* oraz grantu NCN 2011/01/D/HS4/04006: *Czynniki wpływające na zgodność porównań parami w metodach analitycznego procesu hierarchicznego i sieciowego (AHP/ANP)*.

² *ExpertChoice* przeznaczone tylko dla AHP oraz *SuperDecisions*, przeznaczone dla ANP, ale można go również stosować dla modeli AHP.

2001]. Informacje te są również w przystępny sposób przekazane w artykułach publikowanych w języku polskim [np. Adamus 2006]. Przykład najprostszej i najczęściej konstruowanej struktury hierarchicznej został zaprezentowany na rys. 1. Składa się ona z kilku poziomów, z których najwyższy to cel główny problemu decyzyjnego. Na realizację tego celu wpływają położone o poziom niżej kryteria, a te z kolei są zależne od odpowiadających im subkryteriów (czynników). Na samym dole znajdują się warianty decyzyjne (zwane również „alternatywami”). W tak zbudowanym modelu ostateczna decyzja polega na wyborze tego wariantu decyzyjnego, który w najwyższym stopniu spełnia najważniejsze subkryteria oraz kryteria.



Źródło: Opracowanie własne na podstawie np. [Saaty 1994].

Rys. 1. Przykład struktury hierarchicznej w modelu AHP

Ważność poszczególnych elementów względem siebie wyznaczana jest przez dokonanie ich porównań parami. Porównania te dokonywane są z użyciem tzw. fundamentalnej skali porównań Saaty’ego, gdzie przewaga jednego elementu nad drugim oznaczana jest od „takiego samego znaczenia” (=1), poprzez „słabą przewagę” (=3), „mocną przewagę” (=5), „bardzo mocną przewagę” (=7) aż

do „absolutnej/ekstremalnej przewagi” (=9). W przypadku, gdy osoba oceniająca nie jest zdecydowana do końca, można do skali wprowadzić liczby pośrednie (2,4,6,8). Porównania dokonywane są na zasadzie odwrotności: jeśli element A jest 3 razy lepszy od B, to B stanowi 1/3 elementu A. W sumie skala daje aż 17 możliwości. Tak wyrażone opinie wprowadzane są do kwadratowej macierzy **A** porównań parami o wymiarach ($n \times n$), gdzie n jest liczbą porównywalnych kryteriów. Macierz ta stanowi główne narzędzie analizy metody AHP [np. Saaty 1996]:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ 1/a_{12} & 1 & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1/a_{1n} & 1/a_{2n} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad (1)$$

Taka macierz konstruowana jest na każdym poziomie modelu AHP. W modelu zaprezentowanym na rys. 1, w pierwszej kolejności budowana jest macierz służąca analizie ważności kryteriów względem celu głównego. Następnie budowane są macierze dla analizy znaczenia subkryteriów w stosunku do właściwych im kryteriów. Macierzy tych jest tyle, ile w modelu jest „klastrow” zależności kryterium-subkryteria. Dla każdej macierzy obliczane są tzw. wektory priorytetów $W(w_1, w_2, w_3)$, które określane są także jako współczynniki wagowe (wagi), i które wskazują relatywną ważność porównywanych elementów. Ponieważ uzyskanie

Tabela 1

Obliczanie współczynników wagowych (priorytetów)

			Średnia geometryczna r_i	Priorytety (wagi) w_i
1	a_{12}	a_{13}	$\sqrt[3]{1 \times a_{12} \times a_{13}}$	$r_1 / \sum_{i=1}^3 r_i$
$1/a_{12}$	1	a_{23}	$\sqrt[3]{1/a_{12} \times 1 \times a_{23}}$	$r_2 / \sum_{i=1}^3 r_i$
$1/a_{13}$	$1/a_{23}$	1	$\sqrt[3]{1/a_{13} \times 1/a_{23} \times 1}$	$r_3 / \sum_{i=1}^3 r_i$
			$\sum_{i=1}^3 r_i$	$\sum_{i=1}^3 w_i = 1$

Źródło: na przykład [Adamus & Łasak 2009].

dokładnych wyników wymaga wykonania szeregu skomplikowanych procedur matematycznych dla każdej macierzy³, w literaturze dotyczącej AHP pokazane są uproszczone metody obliczania, za pomocą których uzyskuje się zbliżone wyniki. Do najczęściej stosowanych należy obliczanie za pomocą średniej geometrycznej, gdzie stopień pierwiastka równy jest liczbie porównywanych elementów [np. Adamus & Łasak 2009]. Poszczególne wartości tak obliczonego wektora macierzy **A** są normalizowane, dając wektory priorytetów w_1, w_2, w_3 . Procedura ta została przedstawiona w tabeli 1.

Powyższa procedura musi być przeprowadzona dla każdej macierzy. Współczynniki wagowe (priorytety) określają względną ważność elementów decyzyjnych na każdym poziomie modelu hierarchicznego. Są to tzw. *priorytety lokalne*, czyli wartości obejmujące relację względem elementu położonego jedynie o jeden poziom wyżej w strukturze hierarchicznej. *Priorytety globalne* określają stopień ważności elementów względem elementu zlokalizowanego w hierarchii o więcej niż jeden poziom wyżej, np. znaczenie subkryteriów w odniesieniu do celu. Ich wartości globalne oblicza się poprzez przemnożenie wartości priorytetu dla relacji subkryterium-kryterium przez wartość właściwego priorytetu kryterium-cel. Tak przeprowadzona procedura nie gwarantuje jednak wiarygodności ostatecznych wyników. Metody AHP/ANP wymagają bowiem na każdym etapie analizy obliczenia tzw. współczynnika niezgodności *CR* (*Consistency Ratio*), który wskazuje na zgodność uzyskanych porównań. Procedura ta została w skrócie omówiona poniżej.

3. WŁAŚCIWOŚCI OPERACYJNE: ZDOLNOŚĆ GENEROWANIA ZGODNYCH WYNIKÓW

Podstawową właściwością operacyjną każdej metody jest zdolność do generowania niesprzecznych, czyli zgodnych, logicznych rezultatów. Wyniki analizy struktury hierarchicznej, według procedury przedstawionej w poprzednim rozdziale, tylko wtedy są wiarygodne, a więc dające rzetelną wskazówkę do podjęcia decyzji, kiedy zostaje spełniony warunek zgodności ocen. Współczynnik zgodności nie może przekraczać 10% ($CR \leq 0,10$)⁴. Podobnie jak w przypadku priorytetów, obliczanie współczynnika *CR* następuje automatycznie przy korzystaniu z odpowiedniego oprogramowania AHP/ANP (ExpertChoice, SuperDecisios). Podstawą do obliczenia *CR* jest wyznaczenie największej wartości własnej (λ_{max}) macierzy **A**. W uproszczony sposób oblicza się ją jako sumę iloczynów sumy wartości porównań w każdej kolumnie macierzy **A** oraz odpowiedniego dla danego elementu współczynnika wagowego. Korzystając z oznaczeń zapisanych w tabeli 1, uproszczoną formułę można przedstawić w następujący sposób:

³ Oprogramowanie ExpertChoice i SuperDecisions wykonują te obliczenia automatycznie.

⁴ Szerzej na temat wartości „granicznej” można znaleźć np. w [Saaty & Vargas 1982].

$$\lambda_{\max} = (1 + 1/a_{21} + 1/a_{31}) \cdot w_1 + (a_{12} + 1 + 1/a_{32}) \cdot w_2 + (a_{13} + a_{23} + 1) \cdot w_3 \quad (2)$$

Kolejnym krokiem jest obliczenie tzw. indeksu niezgodności (*Inconsistency Index* — *IC*) jako ilorazu różnicy największej wartości własnej macierzy i liczby porównywanych elementów⁵ (n) przez różnicę ($n - 1$):

$$IC = (\lambda_{\max} - n)/(n - 1) \quad (3)$$

Na samym końcu obliczamy współczynnik *CR* poprzez podzielenie *IC* przez stabilizowaną wartość *RI*:

$$CR = IC/RI \quad (4)$$

Stabilizowane wartości *RI* zostały wygenerowane przez Saaty'ego na podstawie symulacji dla 500 000 macierzy, i w zależności od liczby porównywanych elementów wynoszą np.:

dla $n = 3$, $RI = 0,52$;

dla $n = 4$, $RI = 0,89$;

dla $n = 5$, $RI = 1,11$;

dla $n = 6$, $RI = 1,25$;

Wartości *RI* dla większej liczby n , jak i dokładniejszy opis sposobu ich generowania, można znaleźć np. w [Alonso & Lamata 2006]. Jeśli *CR* przekroczy wartość 0,10, porównania należy uznać za niezgodne, a analizę należy powtórzyć [Saaty 2008]. Ponieważ powtarzanie analizy jest bardzo czasochłonne, wielu badaczy proponowało stosowanie różnych algorytmów mających na celu zredukowanie wartości *CR* przy minimalnej ingerencji (zmianie) danych (porównań) pierwotnych. Ponieważ w każdym przypadku „sztucznej” redukcji współczynnika zgodności zawsze następuje zaburzenie pierwotnych porównań, najlepiej jest uzyskać maksymalnie zgodne wyniki już na etapie gromadzenia danych, czyli dokonywania porównań parami. Aby to się udało, zaleca się porównywanie nie więcej niż 7 ± 2 elementów w jednej macierzy, gdyż tyle właśnie porównań jest w stanie dokonać przeciętny człowiek zachowując wymagany poziom spójności [Saaty & Ozdemir 2003, Miller 1956].

4. PRZEGLĄD LITERATURY DOTYCZĄCEJ AHP/ANP

Istnieje bardzo wiele publikacji na temat wielokryterialnych metod wspomagających procesy podejmowania decyzji w różnych obszarach nauki i praktyki. Oprócz metod AHP/ANP, należą do nich m.in. Electre, Promethe, VDA. Jak zo-

⁵ Im bardziej największa wartość własna macierzy zbliżona do n , tym mniejszy współczynnik *CR* [Saaty 2008].

stało wcześniej wspomniane, metody AHP/ANP cieszą się zdecydowanie największą popularnością w porównaniu do innych metod, o czym świadczy duża (i wciąż szybko rosnąca) liczba publikacji dotyczących tych metod w największych bazach czasopism naukowych, takich jak np. *ScienceDirect*, *Wiley*, *Scopus*. Korzystając tylko z wyszukiwarki bazy *ScienceDirect*, wpisano następujące słowa kluczowe: „analytic hierarchy process”, „analytic network process”, „ahp”, „anp”. Hasło „analytic hierarchy process” wygenerowało 20290⁶ artykułów, natomiast jego skrót „ahp” 10881⁷. Publikacji na temat ANP jest znacznie więcej, należy jednak wziąć pod uwagę fakt, iż prawie w każdym artykule dotyczącym ANP znajduje się odniesienie do metody AHP. Jak bowiem wcześniej wspomniano, „fundament” tych metod, 9-stopniowa skala porównań Saaty’ego, jest uniwersalny dla obydwu metod. Słowo kluczowe „analytic network process” spowodowało znalezienie aż 45890⁸ publikacji, natomiast „anp” dało 18882⁹ rezultatów. Jeszcze pół roku temu liczby te były średnio o kilkaset pozycji niższe, na przykład dla hasła „analytic network process” liczba znalezionych publikacji wynosiła 41000¹⁰. Porównując częstość występowania artykułów na temat AHP/ANP z innymi metodami wspomagania decyzji, „vda” jako słowo kluczowe w tej samej bazie daje 2093¹¹ rezultatów, „electre” 1241¹², natomiast „promethe” zaledwie 23¹³. Co więcej, wartości te nie zmieniły się znacząco w porównaniu ze stanem sprzed pół roku¹⁴. Należy ponadto wziąć pod uwagę fakt, że część z tych artykułów zawiera także odniesienie do metod AHP/ANP.

Artykuły dotyczące AHP/ANP publikowane są głównie w takich czasopismach jak *European Journal of Operational Research*, *International Journal of Production Economics*, *Information and Management*, *Computers and Operations Research*, *Decision Support Systems*, *Socio-Economic Planning Science*, *Journal of Operational Research Society*, *Expert Systems with Applications*, *Journal of Mathematical Psychology*. Publikacje te można generalnie podzielić na dwie grupy: o charakterze „aplikacyjnym”, skoncentrowanym na rozwiązywaniu za pomocą AHP/ANP problemie, oraz „metodologicznym”, gdzie „środek ciężkości” przypada na właściwości samej metody. Ogólne studium kilkuset abstraktów artykułów w obszarze AHP/ANP wykazało, że zdecydowana większość badań w tym zakresie ma charakter „aplikacyjny”. Dotyczą one zastosowania AHP/ANP w różnych obszarach i w odniesieniu do różnych celów decyzyjnych. Takimi celami decyzyjnymi mogą być na przykład planowanie, zakupy, alokacja zasobów, rozwiązywanie konfliktu,

⁶ Stan na 5.11.2011.

⁷ Stan na 5.11.2011.

⁸ Stan na 5.11.2011.

⁹ Stan na 5.11.2011.

¹⁰ Stan na 5.06.2011.

¹¹ Stan na 5.11.2011.

¹² Stan na 5.11.2011.

¹³ Stan na 5.11.2011.

¹⁴ Na przykład, w porównaniu do 5.06.2011 liczba artykułów dt. VDA wzrosła tylko o 2.

ewaluacja, optymalizacja, itd. W obszarze aplikacji, nie ma chyba dziedziny, w której by nie próbowano stosować narzędzi AHP/ANP. Obszary te, w powiązaniu z wyżej wspomnianymi typami celów decyzyjnych, zostały w sposób syntetyczny omówione przez [Vaidya & Kumar 2006]. Przykłady różnorodności zastosowań AHP/ANP to rozwiązywanie takich problemów jak ewaluacja dostawców [Akarte *et al.* 2001], wybór najlepszego oprogramowania [Lai *et al.* 2002], zdefiniowanie czynników sukcesu i opracowanie strategii wdrażania systemu ISO-14001 na podstawie analizy korzyści i kosztów [Chin *et al.* 1999], ewaluacja różnych strategii fuzji w bankowości [Arbel & Orger, 1990], wybór lokalizacji rafinerii w kilku krajach Bliskiego i Środkowego Wschodu [Badri 1999], poprawa jakości komunikacji pacjent-lekarz [Singpurwalla *et al.* 1999], analiza strategii USA wobec Iranu [Saaty 2008] i wiele innych.

Publikacji o charakterze „metodologicznym” zidentyfikowano znacznie mniej. Są to zarówno krytyczne analizy AHP/ANP, jak i propozycje rozwiązań problemów wynikających z matematycznych/algebraicznych własności tych metod. Do najczęściej dyskutowanych problemów związanych z praktycznym użytkowaniem AHP/ANP należą m.in.: agregacja indywidualnych priorytetów w grupowym podejmowaniu decyzji [np. Solms 2009, Forman & Peniwati 1998, Beynon 2005], zmiana kolejności wyników (*rank reversal*) na skutek wprowadzenia do modelu dodatkowego obojętnego elementu [np. Watson & Freeling 1982, Belton & Gear 1983, Weber 1997, Holder 1990, Perez *et al.* 2001] oraz trudności w uzyskaniu spójnych (zgodnych) wyników AHP/ANP [np. Vargas 1982, Finan & Hurley 1997, Apostolou & Hassel 1993; 2002, Alonso & Lamata 2005; 2006, Costa 2006, Ergu *et al.* 2011]. Dużo mniej informacji można znaleźć na temat „operacyjnych” (praktycznych) aspektów AHP/ANP, dotyczących m.in. sposobu gromadzenia danych. Tymczasem na podstawie badań empirycznych zaobserwowano, że końcowe rezultaty są zależne m.in. od sposobu prezentacji kwestionariusza [np. Webber *et al.* 1996] oraz rodzaju użytej skali [Weathers *et al.* 2005].

Przyczyny niezgodności rezultatów AHP/ANP już od dawna stanowiły przedmiot badań na całym świecie. Głównym obszarem, na którym skoncentrowane są badania dotyczące niezgodności, jest współczynnik CR. Istniejąca literatura w tym zakresie próbowała odpowiedzieć na trzy główne pytania badawcze. Po pierwsze, czy ustalona przez Saaty’ego wartość współczynnika niezgodności (CR) na poziomie $\leq 0,10$ powinna być tylko wskazówką, czy też sztywną regułą, odnoszącą się do każdego przypadku. Po drugie, czy współczynnik CR jest odpowiednią miarą poziomu niezgodności. Po trzecie, czy i jak można zredukować współczynnik CR na poziomie macierzy. Pytaniem, do którego praktycznie brak jest w literaturze odniesienia, to jakie czynniki na etapie gromadzenia danych (np. liczba porównywanych elementów) wpływają na poziom zgodności wyników.

W odniesieniu do pierwszej kwestii, część autorów sugeruje, że poziom współczynnika CR ustalony na stałym poziomie $CR \leq 0,10$ jest zbyt restrykcyjny.

[Apostolou & Hassel 1993] próbowali udowodnić za pomocą eksperymentu, że wartość współczynnika CR przekraczająca 0,10 nie wpływa w sposób istotny na końcowe wyniki badań. Eksperyment ten został zakwestionowany przez [Chu & Liu 2001], którzy z kolei znaleźli istotną różnicę pomiędzy wynikami z $CR \leq 0,10$, a tymi gdzie $CR > 0,10$. Inny problem był rozważany m.in. przez [Alonso & Lamata 2006], którzy zaproponowali odmienny sposób pomiaru poziomu niezgodności wyników prowadzący do akceptacji, bądź odrzucenia macierzy. To, czy dana macierz jest spójna bądź nie, zależy od dwóch czynników:

- a) indeksu zgodności (IC), za który autorzy uważają największą wartość własną macierzy λ_{max} ;
- b) wymaganego poziomu zgodności (α), $0 < \alpha \leq 1$, przy czym α jest adaptowalny w zależności od badanego problemu; użytkownik w różnych sytuacjach może potrzebować różnego poziomu zgodności i ten poziom określa procentowo.

Autorzy ponadto kwestionują stabilizowane wartości RI, wygenerowane przez Saaty'ego na podstawie symulacji 500 000 macierzy. Te bowiem są różne dla każdej podobnej symulacji.

Trzecie zagadnienie dotyczy redukcji współczynnika CR na poziomie macierzy. Na przykład, [Costa *et al.* 2006] zastosował w tym celu tzw. algorytm genetyczny (Genetic Algorithm — GA). Polega on na wygenerowaniu w macierzy, gdzie niezgodność wynosi powyżej 10% oraz rozwiązań z CR mniejszym lub równym 10%. Program najpierw analizuje zgodność, jeśli $CR > 10\%$, algorytm losowo generuje serię macryc z wartością niższą niż 10%, zbliżonych do macierzy pierwotnej. Z kolei [Ergu *et al.* 2011] zaproponował trzystopniową procedurę redukcji CR opartą na identyfikacji najbardziej niezgodnych elementów macierzy, [Finan & Hurley 1997] za pomocą symulacji Monte Carlo udowodnili, że matematyczna redukcja wartości CR zwiększa wiarygodność rezultatów analizy. Wielu badaczy proponowało i proponuje różne procedury i algorytmy mające na celu zmniejszenie niezgodności, ale wątpliwość budzi fakt, iż w wielu przypadkach tego typu operacje prowadzą do zmiany oryginalnych informacji uzyskanych podczas prowadzenia badań [np. Tung & Tang 1998].

Ponieważ $CR \leq 0,10$ nadal jest jedyną akceptowalną i powszechnie stosowaną miarą poziomu niezgodności wyników AHP/ANP, istnieje silna potrzeba wypracowania określonych zaleceń dotyczących redukcji możliwości uzyskania zgodnych wyników już na etapie gromadzenia danych. Do takich „działań prewencyjnych” należy przede wszystkim upewnienie się m.in. że istnieje dostateczna ilość informacji na temat badanego problemu, a model decyzyjny został odpowiednio ustrukturyzowany. Dużą rolę odgrywa także wiedza ekspertów, która w przypadku otrzymania niezgodnych wyników, powinna być poddana dodatkowej ocenie [Szczypińska & Piotrowski 2009]. Inną przyczyną generującą sprzeczne rezultaty może być fakt stosowania w AHP/ANP 9-stopniowej skali liniowej, podczas gdy większość problemów nie ma charakteru liniowego. Dla-

tego też jako bardziej wiarygodną sugerowano skalę multiplikatywną (geometryczną) [Holder 1990].

5. EKSPERYMENT

5.1. Opis eksperymentu

Celem przeprowadzonego eksperymentu było zbadanie, jaka jest empiryczna frakcja niezgodnych ocen, dokonywanych przez ekspertów według kryterium oceny zgodności zaproponowanej przez Saaty'ego (współczynnik CR), w zależności od liczby porównywanych parami kryteriów. Określono hipotezę badawczą, która brzmiała, że dla liczby kryteriów większej od 5 liczba sprzecznych (niezgodnych) ocen będzie bardzo wysoka (większa od 30%). Badanie polegało na obliczeniu wskaźnika CR uzyskanego na podstawie zastosowania przez ekspertów metody AHP. Zostali oni poproszeni o porównanie parami kryteriów dotyczących pięciu obiektów. Zostały one dobrane w taki sposób, aby ankietowani (ze względów organizacyjnych byli to najczęściej studenci krakowskich uczelni) mogli być traktowani jako eksperci.

1. Telefon komórkowy (T)
2. Mieszkanie (M)
3. Komunikacja miejska (K)
4. Drukarka (D)
5. Laptop (L).

Ze względu na możliwość popełnienia podczas badania błędu systematycznego polegającego na tym, że porównywanie pierwszego obiektu „zdecyduje” kolejne porównania zdecydowano w każdym zestawie — w sposób losowy — ustalić inną kolejność porównywanych obiektów.

Każdy obiekt był charakteryzowany maksymalnie przez osiem kryteriów, które zostały przedstawione w tabeli 2.

Ze względu na możliwość popełnienia podczas badania błędu systematycznego polegającego na tym, że początkowe kryterium „zdecyduje” kolejne porównania zdecydowano podczas każdego badania — w sposób losowy — ustalić inną kolejność kryteriów. Każdy z obiektów był oceniany ze względu na:

1. Pięć kryteriów
2. Sześć kryteriów
3. Siedem kryteriów
4. Osiem kryteriów

Każdy z ankietowanych został poproszony o ocenę czterech z pięciu obiektów (T, M, K, D, L). Liczba kryteriów dla każdego z obiektów była różna (ułożona w sposób losowy), co oznacza, że jeśli ankietowany oceniał np. (T) ze względu na 5 kryteriów, to pozostałe obiekty mógł ocenić ze względu na 6, 7 lub 8 kryteriów.

Jako kryterium zgodności przyjęto omówiony wcześniej współczynnik CR , którego wartość nie powinna przekraczać 0,10.

Tabela 2

Kryteria charakteryzujące porównywane obiekty

Telefon komórkowy (T)	Mieszkanie (M)	Komunikacja miejska (K)
<ul style="list-style-type: none"> • Wielkość wyświetlacza • Radio • Aparat fotograficzny • Wymiary (długość, szerokość) • Ciężar telefonu • Czas pracy (bateria) • Sygnał wibracyjny • Wielkość klawiatury 	<ul style="list-style-type: none"> • Wielkość łazienki • Odpowiednie piętro • Właściwa technologia • Piwnica • Wielkość mieszkania • Czas dojazdu do centrum • Wielkość kuchni • Lokalizacja 	<ul style="list-style-type: none"> • Punktualność • Wolne miejsca siedzące • Czas oczekiwania na pojazd • Cena biletu • Brak tłoku • Czystość • Bezpieczeństwo • Szybkość poruszania się
Drukarka (D)	Laptop (L)	
<ul style="list-style-type: none"> • Rozdzielczość • Czas wydruku strony • Możliwość druku w kolorze • Możliwość druku obustronnego • Głośność pracy • Wymiary • Koszty eksploatacji • Czas bezawaryjnej pracy 	<ul style="list-style-type: none"> • Pojemność dysku • Szybkość pracy (procesor) • Wielkość pamięci operacyjnej • Kamera • Odpowiednia wielkość ekranu • Odpowiedni kolor obudowy • Liczba miesięcy gwarancji • Ciężar 	

Źródło: Opracowanie własne.

5.2. Wyniki eksperymentu

Dla każdej liczby kryteriów obliczono frakcję ankiet, dla których $CR > 0,1$ według wzoru:

$$W_n = \frac{N_{n,f}}{N_n} \quad (5)$$

gdzie:

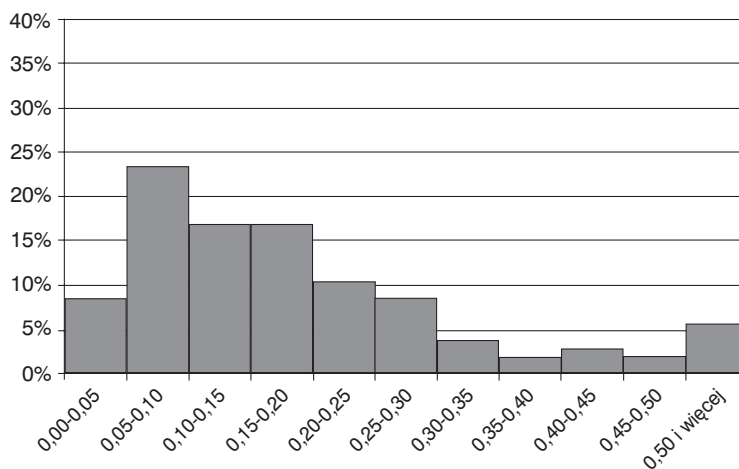
n — liczba kryteriów

W_n — frakcja ankiet w których $CR > 0,10$

$N_{n,f}$ — liczba ankiet, dla których $CR > 0,10$

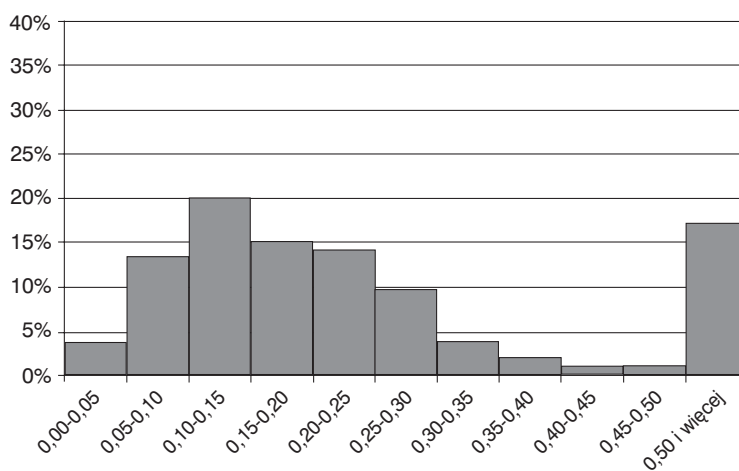
N_n — liczba wszystkich ankiet.

Na rysunkach rys. 2 — rys. 5 zostały przedstawione empiryczne rozkłady współczynnika zgodności dla różnej liczby kryteriów (5, 6, 7, 8).



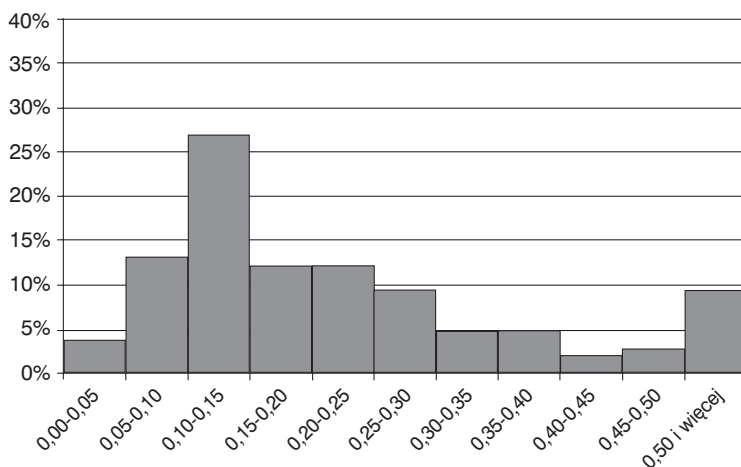
Źródło: Opracowanie własne.

Rys. 2. Rozkład współczynnika CR dla 5 kryteriów (przedział 0,05)



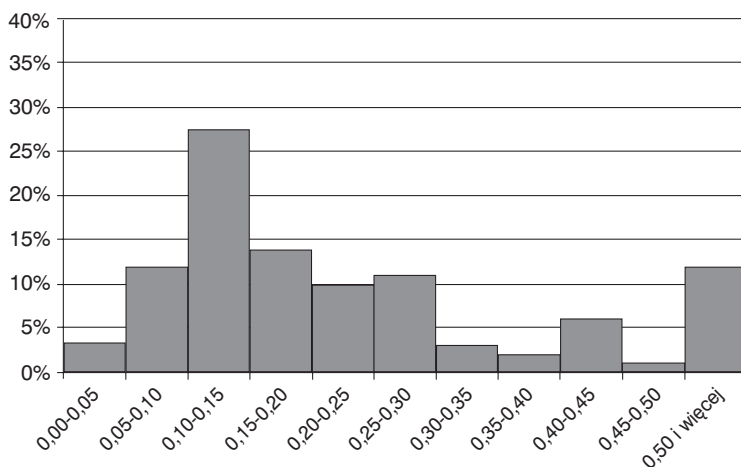
Źródło: Opracowanie własne.

Rys. 3. Rozkład współczynnika CR dla 6 kryteriów (przedział 0,05)



Źródło: Opracowanie własne.

Rys. 4. Rozkład współczynnika CR dla 7 kryteriów (przedział 0,05)



Źródło: Opracowanie własne.

Rys. 5. Rozkład współczynnika CR dla 8 kryteriów (przedział 0,05)

Przedstawione powyżej wykresy wymagają komentarza. Przede wszystkim można zauważyć, że odsetek niezgodnych porównań rośnie wraz ze wzrostem liczby kryteriów. Dla 6, 7 oraz 8 kryteriów (rys. 3, rys. 4 oraz rys. 5) najczęściej wartość wskaźnika niezgodności znajduje się w przedziale pomiędzy 0,1 a 0,15.

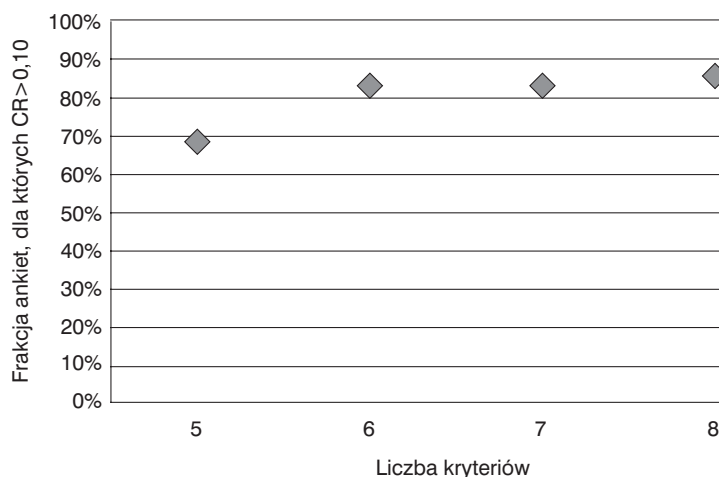
Dla wszystkich badań charakterystyczną właściwością jest występowanie wartości CR większych od wartości 0,5.

Wyniki eksperymentu dla 5, 6, 7 i 8 kryteriów zestawiono w sposób zbiorczy w tabeli 3 jako frakcje ankiet, dla których wartość CR jest większa od zakładanego przez Saaty'ego poziomu 0,10. Rys. 6 przedstawia wykres frakcji niezgodnych ocen w zależności od liczby porównywanych kryteriów. Jak się spodziewano, im wyższa liczba kryteriów, tym wyższa frakcja niezgodnych ankiet. Dla 5 kryteriów poziom ten wynosi 68,22%, co budzi wątpliwości dotyczące założenia metody AHP mówiącego, że człowiek jest zdolny do efektywnego dokonania porównań 7 ± 2 elementów. Jak ponadto wykazano, w przypadku większej liczby kryteriów (od 6 wzwyż), frakcja ta sięga ponad 80%, jednakże różnice w liczbie niezgodnych ankiet dla 6, 7, i 8 kryteriów są bardzo niewielkie ($W_6 = 83,02\%$, $W_7 = 83,33\%$, $W_8 = 85,29\%$).

Tabela 3

Wyniki badań dla poszczególnej liczby kryteriów jako frakcja ankiet $CR > 0,10$

	5 kryteriów	6 kryteriów	7 kryteriów	8 kryteriów
Liczba ankiet poprawnie wypełnionych (N_n)	107	106	108	102
Liczba ankiet z $CR > 0,10$ ($N_{n,f}$)	73	88	90	87
Frakcja ankiet z $CR > 0,10$ (W_n)	68,22%	83,02%	83,33%	85,29%



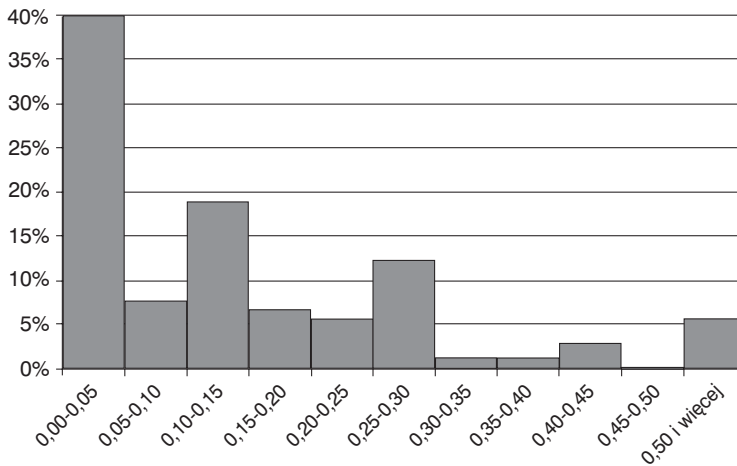
Źródło: Opracowanie własne.

Rys. 6. Frakcja niezgodnych ankiet w zależności od liczby porównywanych kryteriów

Wyniki powyższego eksperymentu skłoniły autorów do zadania sobie pytania, jakie wyniki otrzymamy przy niższej liczbie kryteriów. Dlatego też przeprowadzono eksperyment uzupełniający, którego celem było zbadanie, jak wysoka jest frakcja niezgodnych porównań w przypadku 3 kryteriów. Jako badany obiekt wybrano sklep spożywczy, który był analizowany ze względu na trzy kryteria:

- Szybkość obsługi,
- Łatwość dojazdu,
- Wybór produktów.

Wyniki pokazały, że dla 108 poprawnie wypełnionych ankiet frakcja niezgodnych ocen, obliczona na podstawie wyżej przedstawionego wzoru, wyniosła aż 52,78%. Rozkład współczynnika CR został natomiast przedstawiony na rys. 7.



Źródło: Opracowanie własne.

Rys. 7. Rozkład współczynnika CR dla 3 kryteriów (przedział 0,05)

6. WNIOSKI

W niniejszej pracy przedstawiono, na podstawie badań empirycznych, skalę występowania jednego z głównych problemów związanych ze stosowaniem metod AHP/ANP, a mianowicie trudność w uzyskaniu zgodnych (spójnych) wyników, nawet przy niewielkiej liczbie porównywanych elementów. Początkowe założenie, że dla liczby kryteriów większej od 5 liczba sprzecznych (niezgodnych) ocen będzie bardzo wysoka (większa od 30%), zostało potwierdzone. Co więcej, badania wykazały, że bardzo wysoka frakcja niespójnych odpowiedzi (ponad 50%) występuje już przy analizie 3 kryteriów, natomiast w przypadku 8 kryteriów przekracza 80%. Wyniki eksperymentu pokazały również, iż w przypadku

większej liczby kryteriów różnice we frakcji liczbie niezgodnych ankiet dla 6, 7, i 8 kryteriów są bardzo niewielkie. Konieczne są zatem dalsze badania w tym zakresie, w szczególności biorąc pod uwagę takie czynniki, jak:

- a) wielkość próby; celem uzyskania miarodajnych wyników, badania należy powtórzyć na większej próbie,
- b) dobór ankietowanych do badania; w przedstawionych eksperymentach, na podstawie badania nielosowej próby krakowskich studentów wnioskowano o całą populację,
- c) wielkość ankiety; przeprowadzana ankieta była zbyt obszerna, gdyż oceniający otrzymywał jednorazowo ponad 20 stron (na każdej stronie były trzy porównania), co mogło powodować zmęczenie i w konsekwencji „losowe” odpowiedzi.

Biorąc pod uwagę podstawową właściwość operacyjną metody AHP, jaką jest generowanie niesprzecznych wyników, problem ten wymaga dalszych badań i precyzyjnego zdefiniowania warunków, przy których metodę tę należy stosować.

BIBLIOGRAFIA

- Adamus W. 2006. *Wejście Polski do strefy euro w ujęciu korzyści, kosztów, szans i ryzyka*, [w:] Nowe wyzwania w zarządzaniu organizacjami (red. W. Adamus), *Acta Academiae Modrewniana*, Kraków 2006.
- Adamus W., Łasak P. 2010. *Zastosowanie metody AHP do wyboru umiejscowienia nadzoru nad rynkiem finansowym*, *Bank i Kredyt*, 41(4): 73–100.
- Akarte M.M. et al. 2001. *Web based casting supplier evaluation using Analytic hierarchy process*, *Journal of the Operational Research Society*, 52(5): 511–522.
- Alonso J.A., Lamata M.T. 2005. *A Statistical Criterion of Consistency in the Analytic Hierarchy Process*, [w:] V. Torra et al. (Eds.), *MDAI 2005*, pp. 67–76, Springer-Verlag Berlin Heidelberg.
- Alonso J.A., Lamata M.T. 2006. *Consistency in the analytic hierarchy process: a new approach*, *International Journal of Uncertainty, Fuzziness and Knowledge-Based Systems*, 14(4): 445–459.
- Apostolou B., Hassel J.M. 1993. *An empirical examination of the sensitivity of the analytic hierarchy process to departures from recommended consistency ratios*, *Mathematical and Computer Modeling*, (4/5): 163–170.
- Apostolou B., Hassel J.M. 2002. *Note on Consistency Ratio: A Reply*, *Mathematical and Computer Modeling*, (35): 1081–1083.
- Arbel A., Orger Y.E. 1990. *An application of AHP to bank strategic planning: The merger and acquisitions process*, *European Journal of Operational Research*, 48(1): 27–37.
- Badri M. 1999. *Combining the AHP and GP for global facility location-allocation problem*, *International Journal of Production Economics*, 62(3): 237–248.
- Belton V., Gear T. 1983. *On a shortcoming of Saaty's method of analytic hierarchies*, *Omega*, 11(3): 228–230.
- Beynon M.J. 2005. *A method of aggregation in DS/AHP for group decision-making with the non-equivalent importance of individuals in the group*, *Computers and Operations Research*, 32: 1881–1896.
- Costa J.E., Wanderley A.J.M., Cosenza C.A.N. 2006. *A proposition to solve inconsistency problem in decision matrices using genetic algorithms*, third International Conference on Production Research — Americas' Region 2006 (ICPR-AM06).

- Ergu D., Kou G., Peng Y., Shi Y. 2001. *A Simple Method to Improve the Consistency Ratio of the Pair-wise Comparison Matrix in ANP*, European Journal of Operational Research, In press.
- Finan J.S., Hurley W.J. 1997. *The Analytic Hierarchy Process: Does adjusting a pairwise comparison matrix to improve the consistency ratio help?*, Computers and Operations Research, 24(8): 749–755.
- Forman E., Peniwati K. 1998. *Aggregating individual judgments and priorities with the Analytic Hierarchy Process*, European Journal of Operational Research, 108: 165–169.
- Holder R.D. 1990. *Some Comments on the Analytic Hierarchy Process*, The Journal of the Operational Research Society, 41(11): 1073–1076.
- Chin K.S., Chiu S., Tummala V.M.R. 1999. *An evaluation of success factors using AHP to implement ISO 14001 based EMS*, International Journal of Quality & Reliability Management, 16(4): 341–361.
- Chu P., Liu J.K.-H. 2002. *P. Chu and Note on consistency ratio*, Mathematical and Computer Modeling, 35: 1077–1080.
- Lai V., Wong B.K., Cheung W. 2002. *Group decision making in a multiple criteria environment: A case using the AHP in the software selection*, European Journal of Operational Research, 137(1): 134–144.
- Miller D. 1956. *The Magical Number Seven, Plus or Minus Two: Some Limits on Our Capacity for Processing Information*, The Psychological Review, 63: 81–97.
- Perez J., Jimeno J.L., Mokotoff E. 2001. *Another potential strong shortcoming of AHP* (<http://ideas.repec.org/p/alc/alcdtd/8-02.html>).
- Saaty T. 1994. *Fundamentals of Decision Making and Priority Theory with the Analytic Hierarchy Process*, Pittsburgh, PA: RWS Publications.
- Saaty T.L. 1996. *Decision Making for Leaders: The Analytical Hierarchy Process for Decisions in a Complex World*, The Analytical Hierarchy Process Series, 2: 71–74.
- Saaty T. 2001. *The seven pillars of the analytic hierarchy process*, (www.creativedecisions.net).
- Saaty T. Ozdemir M. 2003. *Why the magic number seven plus or minus two*, Mathematical and Computer Modeling, 38: 233–244.
- Saaty T.L. 2008. *Relative Measurement and Its Generalization in Decision Making Why Pairwise Comparisons are Central in Mathematics for the Measurement of Intangible Factors The Analytic Hierarchy/Network Process*, RACSAM Rev. R. Acad. Cien. Serie A. Mat., 102(2): 251–318.
- Singpurwalla N., Forman, E., Zalkind D. 1999. *Promoting shared health care decision making using the analytic hierarchy process*, Socio-Economic Planning Sciences, 33(4): 277–299.
- Solms, S. 2009. *Homogeneity and choice aggregation in the analytic hierarchy process*, ISAHIP, Pittsburgh, Pennsylvania, USA, 29 July-1 August 2009.
- Stefanów P., Prusak A. 2011. *Badanie wiarygodności i skuteczności skali porównań Saaty'ego w metodzie AHP i ANP, Przedsiębiorcze aspekty organizacji i biznesu*, pod red. A. Chodyńskiego.
- Szczypińska A., Piotrowski E.W. 2009. *Inconsistency of the judgment matrix in the AHP method and the decision maker's knowledge*, Physica A, 388: 907–915.
- Tung S.L., Tang S.L. 1998. *A comparison of the Saaty's AHP and modified AHP for right and left eigenvector inconsistency*, European Journal of Operational Research, 106: 123–128.
- Vaidya O.S., Kumar S. 2006. *Invited Review Analytic hierarchy process: An overview of applications*, European Journal of Operational Research, 169: 1–29.
- Saaty T.L., Vargas L.G. 1982. *The Logic of Priorities*, Kluwer Nijhoff Publishing, Massachusetts.
- Watson S.R., Freeling A.N.S. 1982. *Assessing Attribute Weights*, Omega, 10: 582–583.
- Weathers D., Sharmab S., Niedricha R.W. 2005. *The impact of the number of scale points, dispositional factors, and the status quo decision heuristic on scale reliability and response accuracy*, Journal of Business Research, 58: 1516–1524.
- Webber S.A., Apostolou B., Hassel J.M. 1996. *The sensitivity of the analytic hierarchy process to alternative scale and cue presentations*, European Journal of Operational Research, 96: 351–362.
- Weber M. 1997. *Remarks on the paper "On the Measurement of Preferences in the Analytic Hierarchy Process"*, Journal of Multicriteria Decision Analysis, 6: 320–321.