

ANDRZEJ GEISE

## PRZESTRZENNO-CZASOWE MODELOWANIE ZMIENNOŚCI PRODUKCJI W SEKTORACH MIKRO-, MAŁYCH, ŚREDNICH I DUŻYCH PRZEDSIĘBIORSTW W POLSCE<sup>1</sup>

### 1. WSTĘP

Po roku 1989 Polska stała się jednym z dynamiczniej rozwijających się krajów Europy. Szybki rozwój kraju spowodowany był między innymi wzrostem przedsiębiorczości znacznej części społeczeństwa. Nastąpił wzrost liczebności małych podmiotów, dzięki którym wystąpił znaczny wzrost aktywności gospodarczej kraju, przejawiający się we wzroście wartości produktu krajowego brutto oraz spadku poziomu stopy bezrobocia<sup>2</sup>. W związku z powyższym pozycja sektora mikro-, małych i średnich przedsiębiorstw (MSP) umocniła się i jednocześnie stała się fundamentem gospodarki rynkowej.

Zgodnie z definicją zawartą w ustawie o swobodzie działalności gospodarczej z 2 lipca 2004 r., przedsiębiorstwa klasyfikuje się na mikro-, małe, średnie oraz duże przedsiębiorstwa. Sektor MSP łączy w sobie trzy podstawowe klasy wielkości przedsiębiorstw. Wskazane rodzaje przedsiębiorstw w dużym stopniu są niejednorodne. Na podstawie definicji każdej klasy przedsiębiorstw można wyodrębnić wiele różnic występujących między nimi. Również literatura ekonomiczna wskazuje różnice wewnątrz sektora MSP. Przykładem może być fakt, że bariery silnie wpływające na ograniczenie rozwoju mikroprzedsiębiorczości, nie mają aż tak dużego znaczenia przy rozwoju średnich przedsiębiorstw. Należy zauważyć, że sektor MSP łączy w sobie grupy przedsiębiorstw różne m.in. pod względem zarządzania, organizacji oraz planowania (por. Dominiak, 2005). Ważne jest zatem, aby rozpatrywać przedsiębiorstwa w oddzielnych grupach według klas wielkości.

Celem artykułu jest prezentacja oraz wykorzystanie statycznego modelowania panelowego w analizie porównawczej modelowego związku produkcji w sektorach

---

<sup>1</sup> Artykuł stanowi wyniki badania przeprowadzonego w ramach pracy magisterskiej napisanej pod kierunkiem dr hab. Marioli Piłatowskiej, prof. UMK.

<sup>2</sup> Spadek poziomu stopy bezrobocia nie miał charakteru systematycznego. Były okresy, zwłaszcza w początkowym okresie transformacji, gdy poziom bezrobocia w kraju gwałtownie rósł, natomiast były również okresy ożywienia gospodarczego, w których bezrobocie spadało.

mikro-, małych, średnich oraz dużych przedsiębiorstw, drogą analizy współczynników elastyczności z funkcji produkcji Cobb-Douglasa dla poziomu produkcji sprzedanej przemysłu oraz poprzez analizę współczynników produktywności krańcowej z liniowych modeli produkcji.

W artykule zaprezentowano podstawowe estymatory służące estymacji parametrów modeli panelowych oraz testy pozwalające ocenić heteroskedastyczność analizowanych modeli. Kolejny punkt artykułu zawiera wyniki analizy empirycznej produkcji w badanych sektorach przedsiębiorstw. Wnioski z przeprowadzonej analizy oraz kierunki dalszych badań zaprezentowano w podsumowaniu artykułu.

## 2. MODELOWANIE DANYCH O CHARAKTERZE PRZESTRZENNO-CZASOWYM

Ze względu na panelowy charakter danych szacując parametry poszczególnych modeli produkcji posłużono się statycznymi modelami panelowymi. Rosnące znaczenie zastosowań modeli panelowych wielokrotnie podkreślane jest w literaturze światowej oraz polskiej. Założenia, podstawowa terminologia, a także zależności występujące w metodyce budowy statycznych modeli panelowych rozwinięte zostały m.in. w pracach Matyasa i Severstre (1996), Johnston'a i DiNardo (1997), Wooldridge'a (2002), Greene'a (2003), Verbeeka (2004) oraz Baltagi'ego (2005).

W pracy podjęto próbę zastosowania modeli panelowych do zbadania kierunku i natężenia zmian w produkcji w sektorze MSP. Głównym założeniem konstrukcji modeli panelowych jest niezmiennosc parametrów przy zmiennych objaśniających względem obiektów i czasu. Zróżnicowanie składnika losowego lub wyrazu wolnego (w zależności od założeń) względem obiektów i/lub czasu pozwala na uwzględnienie zjawiska braku homogeniczności obiektów lub zróżnicowania modelowanego zjawiska w czasie. Modele statyczne, które omówione zostaną poniżej nazywa się odpowiednio modelami z efektami stałymi (*fixed effects*) oraz modelami z efektami losowymi (*random effects*) (por. Dańska-Borsiak, 2011, s. 39).

### 2.1. METODY ESTYMACJI PARAMETRÓW MODELI PANELOWYCH

Estymator panelowy MNK stanowi najprostszy sposób estymowania parametrów modelu opartego na danych panelowych, w którym zakłada się, że badana populacja jest homogeniczna (badane obiekty są jednorodne) oraz odchylenia zaobserwowane pomiędzy rzeczywistą wartością zmiennej objaśnianej a wartością teoretyczną, spowodowane są wyłącznie składnikiem losowym, którego rozkład jest niezależny i identyczny dla każdego obiektu we wszystkich okresach (por. Johnston, DiNardo, 2005). W praktyce, założenie to jest trudne do spełnienia, dlatego w estymacji parametrów modelu opartego na danych panelowych proponuje się dwa podstawowe podejścia. Pierwsze podejście stanowi estymator efektów stałych (FE – *fixed effects*), który stosuje się w estymacji parametrów modeli ze stwier-

dzonymi efektami indywidualnymi. Sformułowanie modelu zakłada, że efekty indywidualne  $\beta_i$  dla poszczególnych jednostek nie są przypadkowe i możliwe jest oszacowanie ich wartości (por. Osińska, 2007). Oznacza to, że różnice między poszczególnymi jednostkami można uchwycić w różnicach pojawiających się w wyrazie wolnym. Odwołując się do konstrukcji modelu efektów stałych należy wskazać, że podstawowym ograniczeniem w estymacji parametrów takiego modelu jest problem odwracania macierzy zbyt dużego rzędu. Rozwiązaniem problemu jest przekształcenie danych a następnie szacowanie parametrów na nowo zdefiniowanych szeregach panelowych. Przekształcenia polegają na uśrednieniu modelu względem czasu, a następnie odjęciu stronami od wartości  $x_i$  oraz  $y_i$  dla  $i$ -tego obiektu odpowiadających im średnich arytmetycznych. Wówczas estymator parametrów strukturalnych FE przyjmuje postać (por. Kufel, 2011):

$$\hat{\beta}_{FE} = (\tilde{X}^T \tilde{X})^{-1} \tilde{X}^T \tilde{y}. \quad (1)$$

Drugim sposobem estymacji parametrów modeli panelowych jest zastosowanie estymatora efektów losowych (*RE – random effects*), który w odróżnieniu od estymatora *FE*, efekty indywidualne traktuje jako zmienne losowe i stanowią one element składnika losowego, rozumianego jako proces stochastyczny. Ze względu na zależność między składnikiem losowym a efektami indywidualnymi wnioskuje się, że występuje autokorelacja w resztach. Implikuje to konieczność stosowania w modelowaniu uogólnionej metody najmniejszych kwadratów (UMNK).

Estymator UMNK ma następującą postać (por. Osińska, 2007):

$$\hat{\beta}_{UMNK} = (X^T \Omega^{-1} X)^{-1} X^T \Omega^{-1} y, \quad (2)$$

w którym:

$X$  – oznacza macierz obserwacji na zmiennych objaśniających o wymiarze  $(NT \times K)$ ,

$y$  – oznacza macierz obserwacji na zmiennej objaśnianej o wymiarze  $(NT \times 1)$ ,

$\Omega^{-1}$  – macierz blokowo diagonalna o wymiarze  $(NT \times NT)$  postaci:

$$\Omega^{-1} = \begin{bmatrix} \omega^{-1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \omega^{-1} \end{bmatrix}, \quad (3)$$

w której elementy głównej przekątnej wyznacza się wg formuły:

$$\omega^{-1} = \sigma_{FE}^{-2} \left[ 1 - \frac{\sigma_{RE}^2}{\sigma_{FE}^2 + T\sigma_{RE}^2} e_i e_i^T \right], \quad (4)$$

$e_i$  – oznacza wektor reszt z uogólnionego modelu dla danych panelowych,

$\sigma_{FE}^2$  – wariancja składnika losowego z modelu o stałych efektach ( $FE$ ),

$\sigma_{RE}^2$  – wariancja składnika losowego z modelu o losowych efektach ( $RE$ ).

## 2.2. ESTYMATOR EFEKTÓW STAŁYCH CZY ESTYMATOR EFEKTÓW LOSOWYCH

Znając podstawowe typy estymatorów parametrów modeli panelowych, należy odpowiedzieć na pytanie, który z nich jest najlepszy w danej sytuacji. Dokonuje się tego poprzez porównanie własności opisanych estymatorów, wykorzystując w tym celu odpowiednie testy heteroskedastyczności: Walda, Breuscha-Pagana oraz Hausmana.

Testowanie efektów ustalonych odbywa się przy użyciu testu Walda. Hipoteza zerowa zakłada równość wyrazów wolnych w ujęciu statystycznym oraz ich niezależność od obiektu oraz czasu. Hipoteza alternatywna natomiast, zakłada, że wyrazy wolne są stałe w czasie ale różne dla  $i$ -tych obiektów. Statystyka testu przyjmuje postać (por. Baltagi, 2005):

$$F = \frac{(SSR_{pooled} - SSR_{FE})/(n-1)}{(SSR_{FE})/(NT - N - K)}, \quad (5)$$

$SSR_{pooled}$  – suma kwadratów reszt obliczona dla modelu  $y_{it} = X_{it}\beta + \varepsilon_{it}$ ,

$SSR_{FE}$  – suma kwadratów reszt obliczona dla modelu  $\tilde{y}_i = \tilde{X}_i\beta + \tilde{\varepsilon}_i$ ,

$N$  – liczba obiektów

$T$  – liczba okresów,

$K$  – liczba zmiennych objaśniających w modelu.

Jeżeli  $F \geq F_{\alpha, v_1, v_2}$ , to następuje odrzucenie hipotezy zerowej na rzecz hipotezy alternatywnej, co świadczy o braku jednorodności obiektów i sugeruje użycie estymatora  $FE$ . Wybór  $H_1$  pozwala stwierdzić, że wprowadzenie stałych wartości wyrazu wolnego dla każdego obiektu poprawia dokładność oszacowań parametrów. W przeciwnym przypadku, gdy  $F < F_{\alpha, v_1, v_2}$ , nie ma podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej stwierdza się homogeniczność obiektów i uzasadnia budowę modelu opierając się na założeniach estymatora panelowego MNK (por. Osińska, 2007).

Testowanie efektów losowych odbywa się przy wykorzystaniu testu Breuscha-Pagana. Test ten jest wariantem testu mnożnika Lagrange'a. Prawdziwość hipotezy alternatywnej oznacza, że wprowadzenie efektów indywidualnych do modelu nie

zmienia jego wariancji, stąd wariancja efektów indywidualnych jest zerowa, co oznacza, że wprowadzenie takich efektów jest zbędne, a więc w estymacji lepszy okazał się estymator uogólniony dla danych panelowych (por. Greene, 2003).

Hipotezy testu Breuscha-Pagana weryfikowane są na podstawie statystyki  $LM$ , która przyjmuje postać:

$$LM = \frac{NT}{2(T-1)} \left[ \frac{\sum_{i=1}^N \left[ \sum_{t=1}^T e_{it} \right]^2}{\sum_{i=1}^N \sum_{t=1}^T e_{it}^2} - 1 \right]^2, \quad (6)$$

gdzie  $e_{it}$  są resztami modelu, w którym nie wyróżnia się efektów grupowych.

Przy prawdziwości hipotezy zerowej, statystyka  $LM$  jest zbieżna do rozkładu  $\chi^2(1)$  z jednym stopniem swobody. W przypadku gdy wartość statystyki  $LM$  przekroczy wartość krytyczną, odczytaną z tablic rozkładu  $\chi^2$  dla przyjętego poziomu istotności, należy odrzucić hipotezę zerową, co oznacza, że wariancja składnika losowego zróżnicowanych efektów indywidualnych jest różna od zera, a więc odpowiednim do estymacji modelem jest model RE. Brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej implikuje wyższość estymatora uogólnionego nad estymatorem efektów losowych (por. Osińska, 2007).

Hausman (1978) opisał test, na podstawie którego dokonuje się wyboru między estymatorem efektów stałych a estymatorem losowych efektów indywidualnych. Hipoteza zerowa testu, oznacza brak autokorelacji między efektami indywidualnymi  $\beta_i$  oraz zmiennymi objaśniającymi  $x_{it}$ . Generalna idea testu opiera się na porównaniu obu estymatorów pod względem zgodności oraz efektywności (por. Verbeek, 2004). W związku z tym rozważono różnicę między estymatorami postaci  $\hat{q} = \hat{\beta}_{FE} - \hat{\beta}_{RE}$ , co pozwoliło Hausmanowi wyprowadzić statystykę  $W$  daną wzorem:

$$W = \hat{q}^T [V(\hat{q})]^{-1} \hat{q}, \quad (7)$$

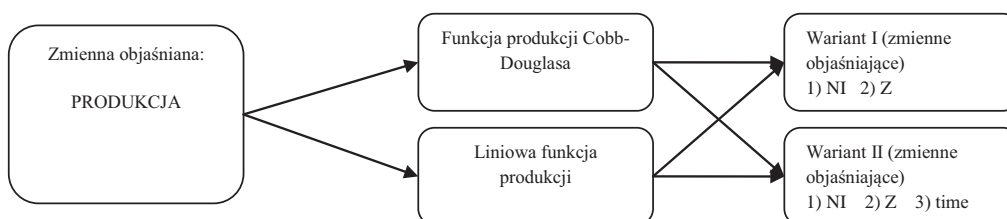
gdzie  $V(\hat{q}) = V(\hat{\beta}_{FE}) - V(\hat{\beta}_{RE})$ ,  $V(\hat{\beta}_{FE})$  oraz  $V(\hat{\beta}_{RE})$  stanowią asymptotyczne macierze wariancji i kowariancji estymatorów  $\hat{\beta}_{FE}$  i  $\hat{\beta}_{RE}$  (por. Owusu-Gyapong, 1986).

Hausman wykazał, że statystyka  $W$  ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  z  $m$  stopniami swobody, gdzie  $m$  jest liczbą zmiennych objaśniających (por. Verbeek, 2004). Przyjęcie hipotezy alternatywnej jako prawdziwej, wiąże się z wyborem estymatora  $FE$ , który jest nieobciążony, a jednak nie spełnia założeń o efektywności. Przy wyborze estymatora  $RE$  jako bardziej właściwego, wybiera się estymator nieobciążony oraz zgodny (por. Osińska, 2007).

## 3. ANALIZA EMPIRYCZNA ZRÓŻNICOWANIA SEKTORA MSP

Analiza empiryczna zróżnicowania sektora MSP przeprowadzona została drogą analizy współczynników elastyczności z modeli produkcji Cobb-Douglasa oraz współczynników produktywności krańcowej z liniowych modeli produkcji. Dane do analizy pobrane zostały z baz danych Głównego Urzędu Statystycznego. Obejmują one poziom produkcji sprzedanej przemysłu, nakłady inwestycyjne oraz zatrudnienie w układzie 16 województw w latach 2005–2009.

Współczynniki elastyczności z funkcji Cobb-Douglasa oraz współczynniki produktywności krańcowej z liniowych modeli szacowane były w dwóch wariantach. Pierwszy wariant modelu Cobb-Douglasa obejmował w specyfikacji dwie zmienne objaśniające tj. nakłady inwestycyjne oraz poziom zatrudnienia. Z kolei drugi wariant modelu Cobb-Douglasa uwzględnia dodatkowo występowanie trendu. Specyfikacja liniowych modeli produkcji jest identyczna jak w przypadku modeli Cobb-Douglasa. Uwzględnienie w modelowaniu zmienności produkcji zmiennej czasowej  $t$ , pozwala na ewentualną eliminację niestacjonarności procesów. Uwzględnienie składnika trendu w modelach produkcji stanowi intuicyjne podejście, nie jest natomiast efektem badania wewnętrznej struktury procesu.



Rysunek 1. Warianty modelowania

Źródło: opracowanie własne.

Do opisu wartości produkcji  $[P_{it}]$ , w zależności od przyjętej postaci analitycznej funkcji, zaproponowano następujące postaci modeli produkcji:

$$\text{model Cobb-Douglasa} \quad P_{it} = \beta_0 NI_{it}^{\beta_1} Z_{it}^{\beta_2} e^{\rho t} e^{u_{it}}, \quad (8)$$

$$\text{model liniowy} \quad P_{it} = \alpha_0 + \alpha_1 NI_{it} + \alpha_2 Z_{it} + \rho t + \varepsilon_{it}, \quad (9)$$

dla  $i = 1, 2, \dots, 16$  oraz  $t = 1, 2, \dots, 5$ ,

gdzie:

$P_{it}$  – wartość produkcji w mln zł w  $i$ -tym sektorze w okresie  $t$ ,

$NI_{it}$  – wartość nakładów inwestycyjnych w tys. zł w  $i$ -tym sektorze w okresie  $t$ ,  
 $Z_{it}$  – wielkość zatrudnienia w tys. osób w  $i$ -tym sektorze w okresie  $t$ ,  
 $t$  – składnik trendu,  
 $\gamma, \rho$  – miernik efektów neutralnego postępu technicznego i postępu organizacyjnego,  
 $\alpha_0, \beta_0$  – parametr wyrazu wolnego,  
 $\alpha_1, \alpha_2$  – współczynniki produktywności krańcowej liniowych modeli produkcji,  
 $\beta_1, \beta_2$  – współczynniki elastyczności funkcji produkcji Cobba-Douglasa,  
 $u_{it}, \varepsilon_{it}$  – składnik losowy równania.

Ze względu na panelowy charakter danych rozważono stosowanie trzech typów estymatorów: panelowego MNK, estymatora fixed effects oraz estymatora random effects. Wyboru jednego z nich dokonano drogą analizy heteroskedastyczności składnika losowego, wykorzystując opisane wyżej testy heteroskedastyczności:

- po pierwsze, badano czy wprowadzenie zróżnicowanych wyrazów wolnych dla  $i$ -tych obiektów daje dokładniejsze oszacowania parametrów modelu danych panelowych (test Walda),
- po drugie, badano założenia o stałości wariancji składnika losowego dla  $N$  obiektów (test Breuscha-Pagana),
- po trzecie, badano własności estymatorów  $FE$  oraz  $RE$  a następnie wybrano nieobciążony estymator (test Hausmana).

Wybór odpowiednich estymatorów dla odpowiednich wariantów modelowania zaprezentowano w tabeli 1.

Dla funkcji produkcji Cobb-Douglasa w wariancie I we wszystkich sektorach przedsiębiorstw w testach Walda oraz Breuscha-Pagana odrzucono hipotezę zerową na korzyść alternatywnej, uznając estymator  $FE$  jako bardziej odpowiedni, w przypadku testu Walda oraz wskazując wyższość estymatora  $RE$ , w przypadku testu Breuscha-Pagana. Rozstrzygnięciem dylematu wyboru najlepszego estymatora stanowi więc test Hausmana, który przy 5% poziomie istotności wskazuje na brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej uznając tym samym estymator  $RE$  jako bardziej efektywny (zob. tabela 1 – model produkcji Cobb-Douglasa, wariant I). Uwzględnienie w analizie czynnika czasu w wariancie II spowodowało zmiany w wyborze estymatora najlepszego do szacowania parametrów w badanych sektorach przedsiębiorstw. Zmiana nastąpiła tylko w sektorze MMP, gdzie w teście Hausmana wskazano na brak podstaw do odrzucenia hipotezy zerowej, tym samym wybierając estymator  $FE$ . W pozostałych sektorach najlepszy okazał się estymator  $RE$  (zob. tabela 1 – modele produkcji Cobb-Douglasa, wariant II). Analiza jednorodności składnika losowego dla liniowych modeli produkcji we wszystkich sektorach przedsiębiorstw w wariancie I wskazuje, iż estymatorem nieobciążonym jest estymator efektów stałych ( $FE$ ) (zob. tabela 1 – liniowe modele produkcji, wariant I). Uwzględnienie czynnika czasu w liniowych modelach produkcji dla sektorów MMP, SP oraz MSP nie spowodowało zmian własności wykorzystywanych estymatorów. W dalszym ciągu nieobciążonym

estymatorem w tych sektorach jest estymator *FE*. Natomiast w sektorze DP, test Hausmana wskazuje, że estymatorem nieobciążonymi efektywnym jest estymator *RE* (zob. tabela 1 – liniowe modele produkcji, wariant II).

Tabela 1.

Testy heteroskedastyczności dla funkcji produkcji Cobb-Douglasa  
oraz liniowych funkcji produkcji – wariant I oraz II

<b>Funkcja produkcji Cobb-Douglasa</b>				
<b>Testy</b>	<b>MMP</b>	<b>SP</b>	<b>MSP</b>	<b>DP</b>
Wariant I				
TEST WALDA	F=26,008*	F=9,406*	F=18,492*	F=17,520*
TEST BREUSCHA – PAGANA	LM=104,556*	LM=58,830*	LM=88,909*	LM=90,901*
TEST HAUSMANA	W = 5,028	W = 1,5878	W = 2,620	W = 1,990
Wariant II				
TEST WALDA	F=33,398*	F=9,532*	F=18,543*	F=52,644*
TEST BREUSCHA – PAGANA	LM=112,680*	LM=62,688*	LM=90,754*	LM=128,139*
TEST HAUSMANA	W = 10,484*	W = 0,015	W = 3,323	W = 1,486
<b>Liniowa funkcja produkcji</b>				
Wariant I				
TEST WALDA	F=27,481*	F=7,335*	F=17,743*	F=58,751*
TEST BREUSCHA – PAGANA	LM=92,471*	LM=22,479*	LM=53,318*	LM=111,514*
TEST HAUSMANA	W = 8,493*	W = 15,249*	W = 17,763*	W = 6,754*
Wariant II				
TEST WALDA	F=28,944*	F=7,736*	F=18,999*	F=73,659*
TEST BREUSCHA – PAGANA	LM=99,534*	LM=24,924*	LM=60,698*	LM=117,217*
TEST HAUSMANA	W = 10,612*	W = 17,067*	W = 17,408*	W = 5,042*

\* odrzucenie hipotezy zerowej przy poziomie istotności  $\alpha=0,05$ .

Źródło: obliczenia własne.

Wyniki oszacowań parametrów w modelach produkcji przy zastosowaniu odpowiednich estymatorów przedstawiono w tabeli 2.



Tabela 2.

## Wyniki estymacji parametrów modeli produkcji

Zmienna	FUNKCJA PRODUKCJI COBBA-DOUGLASA							
	Wariant I				Wariant II			
	MMP	SP	MSP	DP	MMP	SP	MSP	DP
	RE	RE	RE	RE	FE	RE	RE	RE
<b>const.</b>	0,025 (-5,99)	0,066 (-4,14)	0,038 (-4,86)	0,426 (-1,23)	2,895 (0,68)	0,083 (-3,77)	0,043 (-4,64)	0,973 (-0,04)
<b>NI</b>	0,176 (6,77)	0,193 (3,26)	0,240 (6,04)	0,176 (3,05)	0,069 (1,67)*	0,123 (1,84)*	0,159 (2,57)	-0,036 (-0,92)*
<b>Z</b>	0,812575 (12,92)	0,801 (8,53)	0,740 (9,77)	0,716 (7,9)	0,544 (3,58)	0,863 (8,93)	0,822 (9,13)	0,897 (12,23)
<b>t</b>	-	-	-	-	0,030 (4,4)	0,019 (2,15)	0,014 (1,69)*	0,069 (11,27)
<b>Współczynniki determinacji</b>								
(%)	70,75	46,65	64,71	43,46	78,79	49,75	66,11	81,35
(%)	96,70	95,46	95,94	93,89	96,78	95,52	96,12	93,59
(%)	96,21	93,65	95,16	92,58	95,80	93,84	95,37	93,28
<b>Statystyka testu F</b>								
<b>F</b>	1128,2	809,5	909,8	591,6	1157,2	820,9	953,8	562,1
Zmienna	LINIOWA FUNKCJA PRODUKCJI							
	Wariant I				Wariant II			
	MMP	SP	MSP	DP	MMP	SP	MSP	DP
	FE	FE	FE	FE	FE	FE	FE	RE
<b>const.</b>	3074,53 (2,48)	2339,71 (0,94)	6407,71 (1,85)	4925,45 (1,29)	3256,8 (2,77)	5366,08 (2,04)	7911,89 (2,36)	4262,99 (1,04)
<b>NI</b>	0,001 (7,43)	0,001 (2,24)	0,001 (5,77)	0,002 (4,55)	0,001 (4,49)	0,001 (2,09)	0,001 (4,19)	0,001 (2,89)
<b>Z</b>	0,012 (2,37)	0,067 (2,22)	0,019 (1,84)*	0,106 (3,67)	0,012 (2,46)	0,029 (0,91)*	0,016 (1,56)*	0,107 (5,63)
<b>t</b>	-	-	-	-	167,94 (2,88)	319,49 (2,7)	375,28 (2,66)	1511,14 (4,64)
<b>Współczynniki determinacji</b>								
(%)	70,75	35,77	64,67	60,35	74,25	42,64	68,35	70,28
(%)	93,03	92,02	90,71	81,47	93,76	89,23	90,90	81,94
(%)	92,18	90,09	89,80	80,79	92,54	86,04	89,59	81,59
<b>Statystyka testu F</b>								
<b>F</b>	513,9	444,0	375,9	169,3	578,5	319,0	384,6	174,7

\* brak podstaw do odrzucenia  $H_0$  w teście *t-Studenta*, w nawiasach podano wartości statystyki *t-Studenta*, RE oznacza estymator efektów losowych, FE oznacza estymator efektów stałych; statystyka testu F wyznaczona w oparciu o międzygrupowy współczynnik determinacji.

Źródło: obliczenia własne.

Pod względem istotności parametrów oraz jakości dopasowania danych empirycznych, modele produkcji w prezentowanych wariantach są akceptowalne. Ze względu na kluczowy w całym badaniu charakter współczynników elastyczności oraz współczynników produktywności krańcowej, nie usuwano z modeli zmiennych nieistotnych statystycznie. Dla potwierdzenia łącznej istotności parametrów badanych modeli przeprowadzono test F (zob. tabela 2).

Interpretacja ekonomiczna współczynników elastyczności w modelach produkcji Cobb-Douglasa oznacza przeciętny przyrost poziomu produkcji spowodowany jednoprocentowym wzrostem nakładu czynnika produkcji, przy założeniu stałości pozostałych czynników. Jednoprocentowy wzrost wielkości nakładów inwestycyjnych (*ceteris paribus*) w modelach produkcji Cobb-Douglasa w wariancie I powoduje przeciętny wzrost poziomu produkcji średnio o 0,1763% w grupie mikroprzedsiębiorstw i małych przedsiębiorstw, 0,1935% w grupie średnich przedsiębiorstw, 0,2398% w sektorze MSP oraz 0,1763% w grupie dużych przedsiębiorstw. W wariancie II modeli Cobb-Douglasa, wzrost nakładów inwestycyjnych o 1%, *ceteris paribus*, powoduje przeciętny wzrost poziomu produkcji odpowiednio o 0,069% w sektorze mikro i małych przedsiębiorstw, 0,123% w sektorze średnich przedsiębiorstw oraz 0,159% w sektorze MSP. Zmienność produkcji spowodowana zmianami wielkości nakładów inwestycyjnych, przy założeniu stałości poziomu zatrudnienia w badanych sektorach, jest mniejsza w sektorze mikro i małych przedsiębiorstw oraz sektorze średnich przedsiębiorstw w porównaniu z sektorem MSP. Oznacza to, że traktując sektor MSP bez rozróżnienia na sektor małych oraz sektor średnich przedsiębiorstw, zawyżono by wpływ wzrostu nakładów inwestycyjnych na wzrost produkcji (zob. tabela 2).

Uwzględnienie w modelu produkcji Cobb-Douglasa czynnika czasu spowodowało obniżenie siły wpływu zmian wielkości nakładów inwestycyjnych w grupach MMP, SP oraz MSP przy założeniu stałości zatrudnienia (zob. tabela 2).

Analiza zmian wielkości zatrudnienia w modelach produkcji Cobba-Douglasa w wariantach I oraz II przy założeniu stałości nakładów inwestycyjnych, wskazuje, że wzrost zatrudnienia o 1% powoduje średni wzrost poziomu produkcji o:

- 0,8126% w wariacie I oraz 0,5436% w wariancie II w grupie MMP,
- 0,8008% w wariancie I oraz 0,8631% w wariancie II w grupie SP,
- 0,7397% w wariancie I oraz 0,8218% w wariancie II w sektorze MSP,
- 0,7160% w wariancie I oraz 0,8975% w wariancie II w grupie DP (zob. tabela 2).

W wariancie I wzrost zatrudnienia w sektorze mikro i małych przedsiębiorstw oraz w sektorze średnich przedsiębiorstw jest zbliżony. Z kolei badając wpływ wzrostu zatrudnienia na zmiany produkcji, przy założeniu stałości nakładów inwestycyjnych, w sektorze MSP, należy wskazać, że wpływ ten jest niższy. Wyniki te potwierdza również analiza współczynnika elastyczności względem zatrudnienia w wariancie II, gdzie zmienność produkcji w sektorze MSP na zmiany poziomu zatrudnienia, *ceteris paribus*, jest niższa (zob. tabela 2).

Interpretacja ekonomiczna współczynnika produktywności krańcowej z liniowych modeli produkcji oznacza zmiany poziomu produkcji wywołane przez wzrost czynnika produkcji o jednostkę. Wzrost nakładów inwestycyjnych o tys. zł, *ceteris paribus*, powoduje przeciętny wzrost poziomu produkcji w wariancie I o 1,112 tys. zł dla sektora mikro i małych przedsiębiorstw (MMP), o 966 zł dla średnich przedsiębiorstw (SP), o 1,432 tys. zł dla sektora MSP traktowanego łącznie oraz 2,249 tys. zł dla sektora dużych przedsiębiorstw (DP). W wariancie II po uwzględnieniu w modelach produkcji czynnika czasu szacunki parametrów uległy znacznemu zmniejszeniu. W grupie mikro i małych przedsiębiorstw wzrost nakładów inwestycyjnych, *ceteris paribus*, powoduje przeciętny wzrost produkcji o 800 zł. Dla grupy średnich przedsiębiorstw wzrost produkcji wynosi przeciętnie 865 zł, dla sektora MSP 1,11 tys. zł oraz dla grupy dużych przedsiębiorstw 1,36 tys. zł (zob. tabela 2). Reakcję wielkości produkcji w badanych sektorach na zmiany w wielkościach zatrudnienia przy założeniu, że wielkość nakładów inwestycyjnych pozostaje stała w czasie wskazuje, że w wariancie I wzrost zatrudnienia o 1 tys. osób powoduje przeciętny wzrost produkcji o 0,01173 mln zł w sektorze MMP, o 0,06695 mln zł w sektorze SP, o 0,01951 mln zł w sektorze MSP oraz o 106,42 tys. zł w sektorze DP. W wariancie II, szacunki parametrów przy zatrudnieniu wskazują, że reakcja wywołana wzrostem zatrudnienia o 1000 osób, *ceteris paribus*, powoduje wzrost poziomu produkcji przeciętnie o 11,52 tys. zł w przedsiębiorstwach mikro oraz małych, 29 tys. zł w przedsiębiorstwach średniej wielkości, 15,92 tys. zł w sektorze MSP oraz 106,6 tys. zł w sektorze dużych przedsiębiorstw (zob. tabela 2).

Porównując wpływ wzrostu w nakładach inwestycyjnych, *ceteris paribus*, na zmienność produkcji należy wskazać, że w sektorach MMP, SP oraz MSP, zarówno w wariancie I jak i II wpływ jest jednakowy. Natomiast porównując badane sektory pod względem wpływu poziomu zatrudnienia na zmienność produkcji, widocznym jest, że tylko sektor SP charakteryzuje się większą zmiennością. Z kolei sektor MMP oraz MSP przyjmują zbliżone wielkości parametrów produktywności krańcowej (zob. tabela 2).

Powyższe wyniki są zgodne z wiedzą ekonomiczną, dotyczącą wpływu zmian w nakładach inwestycyjnych oraz zatrudnieniu na poziom produkcji.

#### 4. WNIOSKI

W artykule przedstawiono analizę zmian we współczynnikach elastyczności oraz współczynnikach produktywności krańcowej na podstawie modeli produkcji dla sektorów MMP, SP, MSP oraz DP. Współczynniki elastyczności dostarczają informacji względnych o reakcji produkcji na wzrost nakładów i zatrudnienia w badanych sektorach przedsiębiorstw. Informacji bezwzględnych o zróżnicowaniu reakcji produkcji w sektorach przedsiębiorstw dostarczają współczynniki produktywności krańcowej.

Zmiany powstające wskutek wahań w wielkościach czynników produkcji w różnych sektorach przedsiębiorstw znacząco różnią się od tych zmian, które mają miejsce w sektorze MSP. Łączne traktowanie przedsiębiorstw o różnych wielkościach może powodować zniekształcenie informacji o reakcji produkcji na zmiany czynników produkcji w poszczególnych sektorach. Wartości współczynników dla sektorów MMP i SP mają wartości istotnie wyższe lub istotnie niższe w stosunku do wartości osiągniętych przez sektor MSP. Współczynniki elastyczności wyznaczone w grupach przedsiębiorstw pozwalają ocenić, w którym z sektorów produkcja mocniej reaguje na zmiany nakładów inwestycyjnych lub zatrudnienia. Współczynniki elastyczności względem nakładów inwestycyjnych w sektorze MMP w obu rozważanych wariantach przyjmują wartości na poziomie niższym, niż te współczynniki w sektorze MSP (zob. tabela 2). Można więc wskazać, że produkcja sektora MSP reaguje większymi zmianami na wzrost poziomu nakładów inwestycyjnych niż produkcja sektorów MMP bądź SP. Reakcja produkcji na wzrost zatrudnienia w sektorze SP wskazuje jednoznacznie, że w tym sektorze przeciętny wzrost produkcji wywołany przez wzrost zatrudnienia jest większy niż w sektorze MSP (zob. tabela 2). W zależności od przyjętej postaci analitycznej modelu oraz wariantu modelowania, natężenie, z jakim produkcja reaguje na zmiany zatrudnienia lub nakładów inwestycyjnych, jest zróżnicowane (zob. tabela 2).

Dla oceny wpływu zdarzeń mających miejsce w sektorze MSP, ważne jest zbadanie tych zdarzeń osobno, dla mikroprzedsiębiorstw, małych oraz średnich przedsiębiorstw. W toku rozważań nad zmiennością produkcji dla sektora mikro, małych i średnich przedsiębiorstw, należy wskazać, że zasadnym jest badanie zmienności zmiennych charakterystycznych dla sektora MSP z rozróżnieniem sektorów MMP oraz SP. Sektor małych i średnich przedsiębiorstw jest zróżnicowany pod względem reakcji produkcji na zmiany poszczególnych procesów, zmieniających się wewnątrz sektora. Wskazują na to współczynniki elastyczności z funkcji produkcji Cobb-Douglasa oraz współczynniki produktywności krańcowej z liniowych modeli produkcji. Wartości parametrów różnią się między sobą, co wskazuje, że reakcja produkcji na zmiany nakładów inwestycyjnych i zatrudnienia jest niejednakowa. Można stwierdzić, iż badanie zmienności wewnątrz sektora dostarcza więcej wartościowych informacji niż ogólna analiza sektora bez rozróżnienia na podmioty gospodarcze o mikro, małej oraz średniej wielkości.

## LITERATURA

- [1] Baltagi B. H., (2005), *Econometric Analysis of Panel Data (3<sup>rd</sup> ed.)*, John Wiley & Sons Ltd, Londyn.
- [2] Dańska-Borsiak B., (2011), *Dynamiczne modele panelowe w badaniach ekonomicznych*, Wydawnictwo Uniwersytetu Łódzkiego, Łódź.
- [3] Dominiak P., (2005), *Sektor MSP we współczesnej gospodarce*, PWN, Warszawa.
- [4] Greene W. H., (2003), *Econometric Analysis (5<sup>th</sup> ed.)*, Macmillan Publishing Company, New Jersey.
- [5] Johnston J., DiNardo J., (1997), *Econometric Methods (4<sup>th</sup> ed.)*, Wydawnictwo University of Southern California, California.
- [6] Kufel T., (2011), *Ekonometria. Rozwiązanie problemów z wykorzystaniem program Gretl*, PWN, Warszawa.
- [7] Kukuła K. (red.), (2009), *Wprowadzenie do ekonometrii*, Wydawnictwo PWN, Warszawa.
- [8] Maddala G. S., (2008), *Ekonometria*, PWN, Warszawa.
- [9] Osińska M., (2007), *Ekonometria współczesna*, Wydawnictwo "Dom Organizatora", Toruń.
- [10] Owusu-Gyapong A., (1986), Alternative Estimating Techniques for Panel Data on Strike Activity, *The Review of Economics and Statistics*, 68 (3), 526–531.
- [11] Pawłowski Z., (1976), *Ekonometryczna analiza procesu produkcyjnego*, Wydawnictwo PWN, Warszawa.
- [12] Piłatowska M., (2003), *Modelowanie niestacjonarnych procesów ekonomicznych Studium metodologiczne*, Wydawnictwo Uniwersytetu Mikołaja Kopernika, Toruń.
- [13] Ustawa z dnia 2 lipca 2004 roku o swobodzie działalności gospodarczej (tekst jednolity: Dz.U. 2004, Nr 173 poz. 1807 z późn. zm.).
- [14] Wooldridge J., (2002), *Econometric Analysis of Cross Section and Panel Data*, The MIT Press, Londyn.
- [15] Verbeek M., (2004), *A Guide to Modern Econometrics (2<sup>nd</sup> ed.)*, Wydawnictwo John Wiley & Sons Ltd, Londyn.
- [16] Zastempowski M., (2010), *Uwarunkowanie budowy potencjału innowacyjnego polskich małych i średnich przedsiębiorstw*, Wydawnictwo Naukowe UMK, Toruń.

PRZESTRZENNO-CZASOWE MODELOWANIE ZMIENNOŚCI PRODUKCJI W SEKTORACH  
MIKRO-, MAŁYCH, ŚREDNICH I DUŻYCH PRZEDSIĘBIORSTW W POLSCE

## Streszczenie

W ostatnich latach coraz szersze zastosowanie w analizach ekonomicznych znajdują modele panelowe. Przedmiotem rozważań jest przestrzenno-czasowe modelowanie zmienności poziomu produkcji w Polsce. Celem badania jest próba ekonometrycznej weryfikacji hipotezy o wewnętrznej niejednorodności sektora MSP, przez analizę współczynników elastyczności z funkcji Cobb-Douglasa dla poziomu produkcji sprzedanej przemysłu oraz przez analizę współczynników produktywności krańcowej z liniowych modeli produkcji.

**Słowa kluczowe:** sektor MSP, funkcja produkcji Cobba-Douglasa, estymator fixed effects, estymator random effects

TIME-SPATIAL MODELLING OF THE VARIABILITY OF PRODUCTION IN SECTORS  
OF MICRO, SMALL, MEDIUM AND LARGE ENTERPRISES IN POLAND

A b s t r a c t

In recent years, more and more in the economic analysis are used panel models. The consideration of the paper are focused on investigation of spatiotemporal modeling of production in Poland. The main goal of the study is to verify the hypothesis of econometric internal heterogeneity of the SME sector. It is possible due to analysis the elasticity coefficients of the Cobb-Douglas production model and the factor of marginal productivity in linear production model.

**Key words:** SME sector, Cobb-Douglas production model, fixed effects estimator, random effects estimator